Kommutative Algebra
11. Übungsblatt für den 18. Juni 2013

(1) Finden Sie (ohne Computeralgebrasystem) eine Gröbnerbasis des Ideals

$$\langle xy^2 - 1, x - y + 3\rangle$$

von $\mathbb{Q}[x, y]$ bezüglich der lexikographischen Ordnung mit $x > y$.

(2) Sei

$$\begin{aligned} p &:= x^3 + x^2y - 2x^2 + xy + 7x + y^2 + 5y - 14, \\ q &:= 7x^2 + xy^5 + 7xy - 14x + y^6 - 2y^5. \end{aligned}$$

Berechnen Sie (mithilfe der Eliminationseigenschaft von Gröbnerbasen) Generatoren für den Schnitt der Hauptideale (p) und (q), und benutzen Sie dieses Ergebnis, um $\mathrm{ggT}\,(p, q)$ zu bestimmen.

(3) Bestimmen Sie (eventuell ohne Computeralgebrasystem) eine Gröbnerbasis des folgenden Ideals $I = \langle f_1, f_2\rangle$ von $\mathbb{Q}[x]$.

$$\begin{aligned} f_1 &= x - x^3 + x^4 - 2\,x^5 + x^6 \\ f_2 &= x - 2\,x^2 + x^3 - x^4 + x^6. \end{aligned}$$

(4) Seien $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1(t_1, t_2) &= {t_1}^2 + 2t_1 \\ f_2(t_1, t_2) &= {t_2}^2 \\ f_3(t_1, t_2) &= t_1 \cdot t_2. \end{aligned}$$

Diese drei Polynome sind über $\mathbb{R}$ algebraisch abhängig. Bestimmen Sie p mit $p(f_1, f_2, f_3) = 0$ und $p \neq 0$.

(5) Seien $f_1, \ldots, f_s$ paarweise verschiedene Elemente von $k[x_1, \ldots, x_n]$, und sei $F := \{f_1, \ldots, f_s\}$. Sei $i \in \{1, \ldots, s\}$, und sei $r_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ein möglicher Rest von f_i bei einer Standarddarstellung durch $F \setminus \{f_i\}$. Sei $G := (F \setminus \{f_i\}) \cup \{r_i\}$. Zeigen Sie:

> Für alle $q \in k[\boldsymbol{x}]$ gilt: Wenn 0 ein möglicher Rest von q bei einer Standarddarstellung durch F ist, so ist 0 auch ein möglicher Rest von q bei einer Standarddarstellung durch G.