Kommutative Algebra
12. Übungsblatt für den 25. Juni 2013

(1) Wir betrachten den Ring $\mathbb{Q}[x, y, z]/I$ mit $I = \langle y^3 - z^2, -y^2 + xz, xy - z, x^2 - y\rangle$.
   (a) Zeigen Sie, dass $((x + y) + I)$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $((-x^3 + z + 3) + I)$ algebraisch abhängig über $\mathbb{Q}$ ist.
   (c) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[t_1, t_2]$ mit $f \neq 0$, sodass $\overline{f}((x + y + 1) + I, (x + z) + I) = 0 + I$.

(2) (cf. [1]) *Whitneys Schirmfläche* ist durch die Parametrisierung $x = uv, y = v, z = u^2$ gegeben.
   (a) Zeichnen Sie diese Fläche mit Mathematica.
   (b) Finden Sie eine Gleichung der Form $p(x, y, z) = 0$, die von allen Punkten der Fläche erfüllt wird. Dabei soll $p \neq 0$ sein.

(3) Finden Sie eine (nichttriviale) Gleichung, die von allen Punkten im $\mathbb{R}^2$ des *Folium von Descartes* $x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ erfüllt wird. *Hinweis:* Finden Sie p mit $p(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}) = 0$.

(4) Sei $f_1 = xy$, $f_2 = xyz - z$, $g = xyz^2 - z^2$.
   (a) Liegt g im Unterkörper von $\mathbb{R}(x, y, z)$, der von $\mathbb{R} \cup \{f_1, f_2\}$ erzeugt wird? Finden Sie gegebenenfalls Polynome $p, q \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$, sodass $g = \frac{p(f_1,f_2)}{q(f_1,f_2)}$.
   (b) Liegt g im Unterring von $\mathbb{R}[x, y, z]$, der von $\mathbb{R} \cup \{f_1, f_2\}$ erzeugt wird? Finden Sie gegebenenfalls ein Polynom $p \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$, sodass $g = p(f_1, f_2)$.

(5) * Finden Sie ein Polynom in $\mathbb{R}[\![4x^3 - 3x]\!] \cap \mathbb{R}[\![8x^4 - 8x^2 + 1]\!]$. *Hinweis:* Hier hilft keine der Methoden aus der Vorlesung.

Literatur

[1] David Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Ideals, varieties, and algorithms.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1992. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.