Algebra für Informatik (2014S)

4. Übungsblatt

für den 31. März 2014

1. Gegeben seien die Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$
Bestimmen Sie, falls definiert: A^2, A^3, A^T, $(A^T)^T$, $A \cdot A^T$, $A^T \cdot A$.

2. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sodass $ab \neq bc$. Zeigen Sie, dass dann
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
gilt.

3. Seien
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
Bestimmen Sie, falls existent, A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}.

4. Finden Sie invertierbare Matrizen von möglichst kleinem Format, sodass
$$(A \cdot B)^{-1} \neq A^{-1} \cdot B^{-1}.$$

5. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, für die es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $A^n = 0$. Zeigen Sie, dass $E_m - A$ invertierbar ist. (E_m bezeichnet die $m \times m$-Einheitsmatrix.)

   Hinweis: Denken Sie beim Auffinden der inversen Matrix an die Summenformel für die geometrische Reihe.

6. Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass es dann genau eine Matrix B gibt, die $B \cdot A = E_n$ erfüllt.

7. Zeigen Sie Satz 2.12.(1): $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, falls die Dimensionen passen.

8. Seien
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$
Bestimmen Sie $A \cdot B$, $B \cdot A$, A^2, A^3, A^{-1}, A^T, B^T.