# Algebra für Informatik (2014S)

## 5. Übungsblatt

für den 7. April 2014

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

   (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

   (f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

   (g) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Lösen Sie die Gleichungssysteme

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$

3. Lösen Sie die Gleichungssysteme

   (a)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= u + 2 \\ y + 5z + 3u + 3 &= 0 \\ 2u &= 1 + z \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= u + 2 \\ y + 5z + 3u + 3 &= 0 \\ x + y &= 5 + 4u + 2z \end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= u + 2 \\ y + 5z + 3u + 3 &= 0 \\ x + y &= 6 + 4u + 2z \end{aligned}$$

4. Es seien $A$ eine $3 \times 2$-Matrix und $v \in \mathbb{R}^2$ und $w \in \mathbb{R}^3$, sodass
$$A \cdot v = w.$$
   Die Vektoren in den Spalten von $A$ seien mit $s_1$ und $s_2$ bezeichnet. Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass
$$w = \lambda s_1 + \mu s_2$$

5. Bestimmen Sie die Zeilenstaffelform von
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Mischt man die Sorte „Exklusiv“ zu 8,- EUR je kg mit der Sorte „Premium“ zu 6,- EUR je kg, so kostet die Mischung insgesamt 480,- EUR. Vertauscht man dagegen die Mengen der beiden Sorten, so kostet die Gesamtmischung 20,- EUR mehr. Wieviel kg nimmt man von jeder Sorte?

7. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungssysteme

   (a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 67 \\ 21 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 14 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 66 \\ 18 \end{pmatrix}$$

   (c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 14 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 66 \\ 19 \end{pmatrix}$$

8. Seien $A$ eine $m \times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen oder widerlegen Sie: Sind $v_1$ und $v_2$ zwei Lösungen des linearen Gleichungssystems
$$A \cdot x = b,$$
   und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda + \mu = 1$, dann ist auch $\lambda v_1 + \mu v_2$ eine Lösung.

   Geben Sie dazu ein konkretes Beispiel an.