Algebra für Informatik (2014S)

7. Übungsblatt

für den 5. Mai 2014

1. Testen Sie jeweils, ob folgende Folgen von Vektoren linear abhängig sind. Finden Sie, falls die Vektoren linear abhängig sind, eine Linearkombination, die den Nullvektor ergibt und bei der nicht jeder Vektor mit 0 multipliziert wird.
   (a) $(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix})$.
   (b) $(\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\10\\-10\end{pmatrix})$.
   (c) $(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix})$.
2. Bestimmen Sie jeweils eine Basis folgender Unterräume.
   (a) $\{t\begin{pmatrix}7\\-3\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}7\\-5\\1\\0\end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
   (b) $\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + 2z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
3. Finden Sie jeweils eine Basis folgender Unterräume.
   (a) $L(\begin{pmatrix}1\\4\\-5\end{pmatrix})$.
   (b) $L(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix})$.
   (c) $L(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix})$.
4. Sei U der durch $a = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix}0\\3\\2\\4\end{pmatrix}$ aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^4$.
   (a) Ist $B = (a, b)$ eine Basis von U?
   (b) Erweitern sie B zu einer Basis C von $\mathbb{R}^4$.
5. Sei $B = (\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$ eine Basis von $U \subseteq \mathbb{R}^3$ und $C = (\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix})$ eine Basis von $V \subseteq \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass $U = V$ gilt.
6. Seien v_1, v_2, w drei voneinander verschiedene Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, dass w in der linearen Hülle von $\{v_1, v_2\}$ liegt. Zeigen Sie, dass die Folge (v_1, v_2, w) dann linear abhängig ist.
7. Zeigen oder widerlegen Sie für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$: Sind (a, b, c) linear abhängig, so sind auch (b, c) linear abhängig.
8. Seien die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ eine Basis des Unterraums U. Zeigen Sie, dass auch $(a + 2b, b)$ eine Basis von U ist.