Algebra für Informatik (2014S)

12. Übungsblatt

für den 16. Juni 2014

1. Es seien gegeben:

$$E = S\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   ($S(M)$ = Spaltenraum der Matrix M = der durch die Spalten von M aufgespannte Unterraum.) Bestimmen Sie einen Punkt $x \in E$, sodass $v - x \in E^{\perp}$.

   Liegt $v \in E$?

2. Beweisen Sie Satz 5.22 und leiten Sie die dort angegebene Formel für die Projektion auf einen Orthogonalraum her.

3. Welcher Punkt auf der Geraden

$$g = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

   hat von $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ den geringsten Abstand? Wie groß ist dieser?

4. Bestimmen sie für jeden Vektor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Projektion auf

$$U := \{(x, y, z) \mid -x + 2y + 2z = 0\}.$$

5. Sei B eine Orthonormalbasis eines Unterraums des $\mathbb{R}^n$. Wie läßt sich die im Beweis von Satz 5.16 hergeleitete Formel für die orthogonale Projektion für diesen Fall vereinfachen.

6. (a) Bestimmen Sie alle Teiler von 15, 25 und 40.
   (b) Bestimmen sie alle gemeinsamen Teiler von 15 und 25 sowie alle gemeinsamen Teiler von 40 und 25.
   (c) Finden Sie eine Zahl, deren Teiler genau die gemeinsamen Teiler von 40 und 25 sind.

7. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von
   (a) 167 und 115;
   (b) 259 und 378.

8. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und (x, y) eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $ax + by = c$ Zeigen Sie, dass dann

$$\mathrm{ggT}(a, b) \mid c.$$