Übung 5

1. Für eine Halbgruppe $(H, \circ)$ und $\varnothing \neq T \subseteq H$ sei $\langle T \rangle$ die von T erzeugte

   Unterhalbgruppe. Zeigen Sie, dass die Halbgruppen $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$ von keiner endlichen Menge erzeugt werden können.

2. Sei $(H, \circ)$ eine Halbgruppe und H_1, H_2 Unterhalbgruppen von H. Zeigen Sie, dass dann auch $H_1 \cap H_2$ eine Unterhalbgruppe von H ist. Finden Sie zwei Unterhalbgruppen H_1, H_2 einer Halbgruppe H, sodass $H_1 \cup H_2$ keine Unterhalbgruppe von H ist.

3. Bestimmen Sie alle Unterhalbgruppen von $(\mathbb{Z}_4, \odot)$.

4. Sei $(H, \circ)$ ein Monoid, $x \in H$. Zeigen Sie:

   x ist invertierbar $\Longleftrightarrow x \circ H = H \circ x = H$

5. Zeigen Sie: Jede endliche Unterhalbgruppe U einer Gruppe ist selbst eine Gruppe. Kann die Voraussetzung der Endlichkeit auch weggelassen werden? (Hinweis: Bilden Sie für $u \in U$ die Menge $\{u^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.)