Übung 6

1. Eine Halbgruppe $(H, \circ)$ erfüllt die Kürzungsregel, falls:

   $\forall x, y, z \in H : (x \circ y = x \circ z \Longrightarrow y = z) \wedge (y \circ x = z \circ x \Longrightarrow y = z)$

   Zeigen Sie: Jede Gruppe erfüllt die Kürzungsregel. Gilt auch die Umkehrung, d.h ist jedes Monoid mit Kürzungsregel eine Gruppe? Geben Sie ein Beispiel für eine Halbgruppe, welche die Kürzungsregel nicht erfüllt.

2. Gegeben sei das Monoid $H = (\mathbb{Z}_{360}, \odot)$. Wieviele Elemente hat der Gruppenkern von H? Liegt $[91]$ im Gruppenkern?

3. Sei $(\mathbb{Z}_2^2, \cdot)$ das Monoid aller 2×2 Matrizen über den ganzen Zahlen mit der Matrixmultiplikation. Bestimmen Sie den Gruppenkern dieses Monoids.

4. Welche freien Halbgruppen sind kommutativ?

5. Ist jede unendliche Halbgruppe frei?