

Übung 7

1. (a) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}_5, +)$, $(\mathbb{Z}_6, +)$ und der 8-elementigen Diedergruppe D_4 .
(b) Bestimmen Sie die Ordnungen aller Elemente in diesen beiden Gruppen.
2. (a) Zeigen Sie: $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ ist zyklisch.
(b) Finden Sie einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ und \mathbb{Z}_n für ein $n \in \mathbb{N}$.
3. Ist $(\mathbb{Q}, +)$ zyklisch?
4. Für eine Gruppe (G, \cdot) ist

$$Z(G) := \{z \in G \mid \forall g \in G : zg = gz\}$$

das *Zentrum* von G .

- (a) Zeigen Sie, dass $Z(G)$ eine Untergruppe von G ist.
 - (b) Ist $Z(G)$ ein Normalteiler von G ?
5. Zeigen Sie, dass eine Untergruppe von Index 2 immer normal ist.