Übung 11

1. Sind folgende Polynome irreduzibel?

   (a) $p = x^2 + 1$ über $\mathbb{Z}_2$

   (b) $q = x^3 + 2x + 1$ über $\mathbb{Z}_3$

   (c) $r = x^4 + x^2 + 1$ über $\mathbb{Z}_2$

2. Das Polynom $p = x^4 + x^2 + 2$ ist irreduzibel über $\mathbb{Z}_3$. Wieviele Elemente hat $\mathbb{Z}_3[x]/(p)$? Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_3[x]/(p)$:

   (a) $[x^2 + 1] \cdot [x^2 + 2x]$

   (b) $[x]^{-1}$

   (c) $[x^2 + 1]^{-1}$

   Hinweis: Um das inverse Element zu $[f]$ modulo p zu berechnen, verwenden Sie am besten den erweiterten Euklidschen Algorithmus um $af + bp = 1$ nach a zu lösen.

3. Konstruieren Sie Körper der Ordnung $2, 4$ bzw. 8. Geben Sie ihre Elemente explizit an.

4. Bestimmen Sie die Minimalpolynome folgender Elemente a über K:

   (a) $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$,

   (b) $[x] \in \mathbb{Z}_3[x]/(x^4 + x^2 + 2)$ über $\mathbb{Z}_3$,

   (c) $[x^2] \in \mathbb{Z}_3[x]/(x^4 + x^2 + 2)$ über $\mathbb{Z}_3$.

5. Bestimmen Sie für a und K aus dem vorigen Beispiel jeweils die Körpererweiterung $K(a)$ und ihren Grad über K.