Kommutative Algebra
2. Übungsblatt für den 18. März 2014

(1) (Einfache Ringe) Ein Ring R ist *einfach*, wenn er keine Ideale außer $\{0\}$ und R hat. Zeigen Sie, dass folgende beiden Behauptungen äquivalent sind:
   (a) R ist ein einfacher kommutativer Ring mit Eins, und $|R| \geq 2$.
   (b) R ist ein Körper.

(2) (Einfache Ringe) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und sei M ein maximales Ideal von R. Zeigen Sie, dass R/M ein Körper ist.

(3) (Integritätsbereiche) Zeigen Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist. *Hinweis:* Betrachten Sie für $r \neq 0$ die Abbildung $\lambda_r : R \to R, x \mapsto r\,x$.

(4) (Invertierbare Elemente) Bestimmen Sie für den Ring R und das Element $x \in R$ jeweils, ob x invertierbar, prim, oder irreduzibel ist.
   (a) $R = \mathbb{Z}$, $x = -1$.
   (b) $R = \mathbb{Z}$, $x = -19$.
   (c) $R = \mathbb{Z}$, $x = -6$.
   (d) $R = \mathbb{R}[t]$, $x = t^4 + 2t^2 + 1$.
   (e) $R = \mathbb{Z}[t]$, $x = 5t + 10$.
   (f) $R = \mathbb{Q}[t]$, $x = 5t + 10$.

(5) (Invertierbare Elemente) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie:
   (a) Das Produkt invertierbarer Elemente ist wieder invertierbar.
   (b) Ein Element $r \in R$ ist genau dann invertierbar, wenn das von r erzeugte Ideal (r) gleich R ist.

(6) (Artinsche Ringe, Bonusbeispiel) Ein Ring R ist *Artinsch*, wenn es keine unendliche absteigende Kette $I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq I_3 \ldots$ von Idealen von R gibt.
   (a) Zeigen Sie, dass ein Artinscher Integritätsbereich ein Körper ist. (Das verallgemeinert, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist.) *Hinweis:* Betrachten Sie für $a \neq 0$ die von a^n $(n \in \mathbb{N})$ erzeugten Hauptideale.
   (b) Wir nennen ein Ideal P eines kommutativen Rings mit Eins R *prim*, wenn R/P ein Integritätsbereich ist. Zeigen Sie, dass in jedem Artinschen kommutativen Ring mit Eins jedes prime Ideal maximal ist. *Hinweis:* Betrachten Sie R/P für P prim.