Kommutative Algebra
3. Übungsblatt für den 25. März 2014

(1) (Prime Elemente)
   (a) Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass ein Element p von R genau dann prim ist, wenn der Faktorring $R/(p)$ ein Integritätsbereich ist.
   (b) Zeigen Sie: Wenn p prim ist, ist auch jedes zu p assoziierte Element prim.

(2) (Irreduzible Elemente) Sei R ein Integritätsbereich, und sei $r \in R$ mit $r \neq 0$.
   (a) Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind.
      (i) r ist irreduzibel.
      (ii) Das Ideal (r) ist ein maximales Element in der Menge aller Hauptideale von R, die ungleich R sind.
   (b) Zeigen Sie: Wenn r irreduzibel ist, ist auch jedes zu r assoziierte Element irreduzibel.

(3) (Nicht faktorielle Integritätsbereiche, cf. [1]) Wir betrachten den Ring $R := \mathbb{Z}[\sqrt{5}\,i] := \{a + b\sqrt{5}\,i \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. (Dieser Ring ist ein Unterring von $\mathbb{C}$, also ein Integritätsbereich.)
   (a) Verwenden Sie die Abbildung $N(r) := r \cdot \overline{r}$, um alle invertierbaren Elemente von R zu finden.
   (b) Bestimmen Sie alle Elemente r von R mit $N(r) \leq 9$.
   (c) Zeigen Sie, dass die vier Elemente $2, 3, 1+\sqrt{5}\,i, 1-\sqrt{5}\,i$ alle irreduzibel sind.
   (d) Zeigen Sie, dass R kein faktorieller Ring ist.

(4) Wieviele Elemente haben die folgenden Faktorringe von $\mathbb{Z}[i]$?
   (a) $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + i\rangle$
   (b) $\mathbb{Z}[i]/\langle 3 + 4i\rangle$
   (c) $\mathbb{Z}[i]/\langle a + bi\rangle$, wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.

(5) (Primitive Polynome)
   (a) Sei g ein primitives Polynom in $\mathbb{Z}[x]$, und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ so, dass $\frac{\beta}{\alpha}\, g \in \mathbb{Z}[x]$. Zeigen Sie $\alpha \mid \beta$.
   (b) Für $h \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$ sei $c(h)$ der ggT der Koeffizienten von h. Sei $g \in \mathbb{Q}[x]$, $g \neq 0$, und sei $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ so, dass $\alpha\, g \in \mathbb{Z}[x]$. Zeigen Sie: wenn $\alpha \mid c(\alpha\, g)$, so gilt $g \in \mathbb{Z}[x]$.

Literatur

[1] Wikipedia. Unique factorization domain — wikipedia, the free encyclopedia, 2009. [Online; accessed 17-March-2009].