Kommutative Algebra
5. Übungsblatt für den 8. April 2014

Wir besprechen noch folgende verbliebene Beispiele:

- (3.4) Wieviele Elemente haben die folgenden Faktorringe von $\mathbb{Z}[i]$?
  (1) $\mathbb{Z}[i]/\langle 1+i\rangle$
  (2) $\mathbb{Z}[i]/\langle 3+4i\rangle$
  (3) $\mathbb{Z}[i]/\langle a+bi\rangle$, wenn $\operatorname{ggT}(a,b)=1$.
- (3.5) (Primitive Polynome)
  (1) Sei g ein primitives Polynom in $\mathbb{Z}[x]$, und seien $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ so, dass $\frac{\beta}{\alpha}\,g\in\mathbb{Z}[x]$. Zeigen Sie $\alpha\mid\beta$.
  (2) Für $h\in\mathbb{Z}[x]\setminus\{0\}$ sei $c(h)$ der ggT der Koeffizienten von h. Sei $g\in\mathbb{Q}[x]$, $g\neq 0$, und sei $\alpha\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ so, dass $\alpha\,g\in\mathbb{Z}[x]$. Zeigen Sie: wenn $\alpha\mid c(\alpha\,g)$, so gilt $g\in\mathbb{Z}[x]$.
- (4.3) (Größter gemeinsamer Teiler) Berechnen Sie größte gemeinsame Teiler von $3220+5520x+2300x^2+460x^3+460x^4$ und $-230-230x+46x^3+46x^4$ in $\mathbb{Z}[x]$ und $\mathbb{Q}[x]$.

---

(1) Finden Sie ein Polynom der Form $af+bg\in\mathbb{Q}[x]\setminus\{0\}$ für $f=xy+1$ und $g=xy^2+1$ ($a,b\in\mathbb{Q}[x,y]$).

(2) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, seien A,B Ideale von R, und sei P ein Primideal von R. Mit $\sqrt{A}$ bezeichnen wir das Radikal von A. Zeigen Sie:
  (a) Wenn $A\cap B\subseteq P$, so gilt $A\subseteq P$ oder $B\subseteq P$.
  (b) $\sqrt{P}=P$.
  (c) $\sqrt{A\cap B}=\sqrt{A}\cap\sqrt{B}$.

(3) (Prime Ideale) Sei $R:=\mathbb{Q}[x,y,z]$. Zeigen Sie:
  (a) $\langle x,\,y\rangle$ ist prim.
  (b) $\langle x^2y,\,xy^3\rangle$ ist nicht prim.