Kommutative Algebra

6. Übungsblatt für den 29. April 2014

Wir besprechen noch folgende verbliebene Beispiele:

- (3.5) (Primitive Polynome)
  (1) Sei g ein primitives Polynom in $\mathbb{Z}[x]$, und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ so, dass $\frac{\beta}{\alpha}\, g \in \mathbb{Z}[x]$. Zeigen Sie $\alpha \mid \beta$.
  (2) Für $h \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$ sei $c(h)$ der ggT der Koeffizienten von h. Sei $g \in \mathbb{Q}[x]$, $g \neq 0$, und sei $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ so, dass $\alpha\, g \in \mathbb{Z}[x]$. Zeigen Sie: wenn $\alpha \mid c(\alpha\, g)$, so gilt $g \in \mathbb{Z}[x]$.
- (4.3) (Größter gemeinsamer Teiler) Berechnen Sie größte gemeinsame Teiler von $3220+5520x+2300x^2+460x^3+460x^4$ und $-230-230x+46x^3+46x^4$ in $\mathbb{Z}[x]$ und $\mathbb{Q}[x]$.
- (5.2) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, seien A, B Ideale von R, und sei P ein Primideal von R. Mit $\sqrt{A}$ bezeichnen wir das Radikal von A. Zeigen Sie:
  (1) Wenn $A \cap B \subseteq P$, so gilt $A \subseteq P$ oder $B \subseteq P$.
  (2) $\sqrt{P} = P$.
  (3) $\sqrt{A \cap B} = \sqrt{A} \cap \sqrt{B}$.
- (5.3) (Prime Ideale) Sei $R := \mathbb{Q}[x, y, z]$. Zeigen Sie:
  (1) $\langle x,\, y \rangle$ ist prim.
  (2) $\langle x^2 y,\, x y^3 \rangle$ ist nicht prim.

---

(1) Sei $R := \mathbb{Z}[\![\sqrt[3]{2}]\!]$, und sei $x := 5 + 8\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Da $x \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt[3]{2} + \mathbb{Z}(\sqrt[3]{2})^2$, und da $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt[3]{2}+\mathbb{Z}(\sqrt[3]{2})^2$ ein Unterring von $\mathbb{R}$ ist, ist auch x ganz über $\mathbb{Z}$. Im folgenden Beispiel konstruieren wir ein Polynom in $\mathbb{Z}[t]$ mit führendem Koeffizienten 1, das x als Nullstelle hat.

(a) Sei $b_0 := 1$, $b_1 := \sqrt[3]{2}$, $b_2 := (\sqrt[3]{2})^2$. Finden Sie eine 3×3-Matrix A, sodass

$$\begin{pmatrix} b_0 x \\ b_1 x \\ b_2 x \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

(2) Seien $x := \sqrt{2}$ und $y := \sqrt{\sqrt{2}+1}$.

(a) Zeigen Sie, dass x ganz über $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass y ganz über $\mathbb{Z}[\![x]\!]$ ist.

(c) Finden Sie ein Polynom in $\mathbb{Z}[t] \setminus \{0\}$, das y als Nullstelle hat.

Hinweis: y liegt in $\mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot x + \mathbb{Z} \cdot y + \mathbb{Z} \cdot xy$. Jetzt verwenden Sie die Idee vom Beweis von Satz 5.8 aus dem Skriptum.

(3) Sei $R := \mathbb{Z}[t_1, t_2]/I$, wobei $I := \langle {t_1}^2 - 2,\ {t_2}^2 - t_1 - 1\rangle_{\mathbb{Z}[t_1,t_2]}$.

(a) Zeigen Sie, dass $t_1 + I$ ganz über $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $t_2 + I$ ganz über $\mathbb{Z}[\![t_1 + I]\!]$ ist.

(c) Finden Sie ein Polynom in $\mathbb{Z}[t] \setminus \{0\}$, das $t_2 + I$ als Nullstelle hat.

Hinweis: $t_2 + I$ liegt in $\mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot (t_1 + I) + \mathbb{Z} \cdot (t_2 + I) + \mathbb{Z} \cdot (t_1 + I)(t_2 + I)$. Jetzt verwenden Sie die Idee vom Beweis von Satz 5.8 aus dem Skriptum.

(4) (Algebraische Abhängigkeit) Sei k ein Körper, und sei I ein Ideal von $R := k[x_1, \ldots, x_n]$ mit $1 \notin I$. Seien $y_1, \ldots, y_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Zeigen Sie, dass folgende beiden Bedingungen äquivalent sind.

(a) $(y_1 + I, \ldots, y_m + I)$ ist algebraisch abhängig über k in R/I.

(b) $(y_1 + \sqrt{I}, \ldots, y_m + \sqrt{I})$ ist algebraisch abhängig über k in $R/\sqrt{I}$.

(5) Sei k ein Körper, $n \geq 2$, und sei I ein Ideal von $R := k[x_1, \ldots, x_n]$ mit $1 \notin I$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_1 + I, x_2 + I)$ genau dann algebraisch abhängig ist über k ist, wenn $I \cap k[x_1, x_2] \neq \{0\}$.

(6) In diesem Beispiel überlegen wir uns, ob die Folge $(x^2 + x, x^3 + 2)$ aus $\mathbb{Q}[x]$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist.

(a) Bestimmen Sie eine Transzendenzbasis von $\mathbb{Q}[x]$ über $\mathbb{Q}$.

(b) Können Sie daraus etwas über die Unabhängigkeit von (x^2+x, x^3+2) herleiten?

(c) (Mathematica) Berechnen Sie $p(x^2 + x, x^3 + 2)$ für $p(t_1, t_2) = -27 + 6t_1 + t_1^3 + 3t_2 - 3t_1t_2 - t_2^2$. Was schließen Sie daraus über die algebraische Abhängigkeit von $x^2 + x$ und $x^3 + 2$?

Wir verwenden am Dienstag, dem 29.4.14, auch eine Vorlesungseinheit zum Besprechen der Übungsaufgaben.