Kommutative Algebra
11. Übungsblatt für den 3. Juni 2014

(1) Seien $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Wir nehmen an, dass $f_1 = f_2 = \cdots = f_s = 0$ unlösbar ist. Sei G eine Gröbnerbasis von $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$. Zeigen Sie, dass G ein konstantes Polynom ungleich 0 enthält!

Versuchen Sie, die folgenden Beispiele auch ohne den in Computeralgebrasystemen eingebauten Befehl für das Berechnen von Gröbnerbasen oder überhaupt ohne Computeralgebrasystem zu lösen.

(2) Berechnen Sie eine Gröbnerbasis des folgenden Ideals: $\langle -1 - x\,y + y^2 + x\,y^2,\ -1 + y^2 \rangle$, lexikographische Ordnung, $x > y$.
(3) Berechnen Sie eine Gröbnerbasis des folgenden Ideals: $\langle -1 + a\,b + a^2\,c,\ 2 + b\,c^3 \rangle$, lexikographische Ordnung, $a > b > c$.
(4) Finden Sie eine Gröbnerbasis des Ideals

$$\langle xy^2 - 1, x - y + 3 \rangle$$

von $\mathbb{Q}[x, y]$ bezüglich der lexikographischen Ordnung mit $x > y$.
(5) Seien f_1, f_2 Elemente des Ideals I von $k[x_1, \dots, x_n]$, und sei $\leq$ eine zulässige Monomordnung. Muss das S-Polynom $S(f_1, f_2)$ in I liegen?
(6) Seien $f_1, \dots, f_s$ paarweise verschiedene Elemente von $k[x_1, \dots, x_n]$, und sei $F := \{f_1, \dots, f_s\}$. Sei $i \in \{1, \dots, s\}$, und sei $r_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ ein möglicher Rest von f_i bei einer Standarddarstellung durch $F \setminus \{f_i\}$. Sei $G := (F \setminus \{f_i\}) \cup \{r_i\}$. Zeigen Sie:

  Für alle $q \in k[\boldsymbol{x}]$ gilt: Wenn 0 ein möglicher Rest von q bei einer Standarddarstellung durch F ist, so ist 0 auch ein möglicher Rest von q bei einer Standarddarstellung durch G.