

**Kommutative Algebra**  
**12. Übungsblatt für den 17. Juni 2014**

(1) Sei

$$\begin{aligned} p &:= x^3 + x^2y - 2x^2 + xy + 7x + y^2 + 5y - 14, \\ q &:= 7x^2 + xy^5 + 7xy - 14x + y^6 - 2y^5. \end{aligned}$$

Berechnen Sie (mithilfe der Eliminationseigenschaft von Gröbnerbasen) Generatoren für den Schnitt der Hauptideale  $(p)$  und  $(q)$ , und benutzen Sie dieses Ergebnis, um  $\text{ggT}(p, q)$  zu bestimmen.

(2) Seien  $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$  gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1(t_1, t_2) &= t_1^2 + 2t_1 \\ f_2(t_1, t_2) &= t_2^2 \\ f_3(t_1, t_2) &= t_1 \cdot t_2. \end{aligned}$$

Diese drei Polynome sind über  $\mathbb{R}$  algebraisch abhängig. Bestimmen Sie  $p$  mit  $p(f_1, f_2, f_3) = 0$  und  $p \neq 0$ .

(3) (cf. [1]) *Whitneys Schirmfläche* ist durch die Parametrisierung  $x = uv, y = v, z = u^2$  gegeben.

(a) Zeichnen Sie diese Fläche mit Mathematica.

(b) Finden Sie eine Gleichung der Form  $p(x, y, z) = 0$ , die von allen Punkten der Fläche erfüllt wird. Dabei soll  $p \neq 0$  sein.

(4) Finden Sie eine (nichttriviale) Gleichung, die von allen Punkten im  $\mathbb{R}^2$  des *Folium von Descartes*  $x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$  erfüllt wird. *Hinweis:* Finden Sie  $p$  mit  $p(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}) = 0$ .

(5) Sei  $f_1 = xy, f_2 = xyz - z, g = xyz^2 - z^2$ .

(a) Liegt  $g$  im Unterkörper von  $\mathbb{R}(x, y, z)$ , der von  $\mathbb{R} \cup \{f_1, f_2\}$  erzeugt wird? Finden Sie gegebenenfalls Polynome  $p, q \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$ , sodass  $g = \frac{p(f_1, f_2)}{q(f_1, f_2)}$ .

(b) Liegt  $g$  im Unterring von  $\mathbb{R}[x, y, z]$ , der von  $\mathbb{R} \cup \{f_1, f_2\}$  erzeugt wird? Finden Sie gegebenenfalls ein Polynom  $p \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$ , sodass  $g = p(f_1, f_2)$ .

(6) \* Finden Sie ein Polynom in  $\mathbb{R}[4x^3 - 3x] \cap \mathbb{R}[8x^4 - 8x^2 + 1]$ . *Hinweis:* Hier hilft keine der Methoden aus der Vorlesung.

LITERATUR

- [1] David Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Ideals, varieties, and algorithms*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1992. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.