Algebra für Informatik (2015S)

0. Übungsaufgaben

für den 2. März 2015

1. Sie kennen gewiss viele Rechengesetze für Zahlen. Die grundlegensten seien hier angeführt: Für alle reellen Zahlen a, b, c gelten:

   add-assoz $(a + b) + c = a + (b + c)$;

   add-0 $a + 0 = a = 0 + a$;

   add-neg $a + (-a) = 0 = (-a) + a$;

   add-komm $a + b = b + a$;

   mul-assoz $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

   mul-1 $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$;

   mul-komm $a \cdot b = b \cdot a$;

   distr $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
   $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

   Interpretieren Sie alle Gesetze geometrisch um zu sehen, dass sie unmittelbar einsichtig sind. Verwenden Sie dabei, dass eine reelle Zahl sowohl als ein Punkt am Zahlenstrahl als auch als eine Verschiebung auf diesem interpretiert werden kann. Die Multiplikation mit positiven Zahlen kann sowohl als eine Streckung als auch als Flächeninhalt eines Rechtecks interpriert werden. Wie läßt sich die Multiplikation mit negativen Zahlen geometrisch interpretieren?

2. Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen a, b gilt:

   $$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2.$$

   Leiten Sie diese Formel direkt aus den Rechengesetzen in Aufgabe 1 (also ohne irgendein weiteres Wissen über reelle Zahlen) ab. Einzig die Abkürzungen $a - b = a + (-b)$ und $a^2 = a \cdot a$ (wieder für beliebige reelle Zahlen) sollten sie natürlich zusätzlich verwenden.

   Es ist wichtig, dass Sie jeden einzelnen Schritt klar begründen können.

3. Wir betrachten die Gleichung

   $$(x - 3) \cdot (x - 5) = 0.$$

   Bestimmen Sie alle ihre Lösungen. Achten Sie dabei darauf, dass Sie exakt beweisen, dass

   - jede Ihrer Lösungen tatsächlich eine Lösung ist;
   - es keine weiteren Lösungen gibt.

   Versuchen Sie auch hier, nur das in Aufgabe 1 beschriebene Wissen über reelle Zahlen zu verwenden und jeden Schritt exakt zu begründen. An einer Stelle werden Sie jedoch ein weiteres unmittelbar einsichtiges Wissen über reelle Zahlen verwenden müssen. Welches?

4. Wir betrachten das Gleichungssystem

   $$\begin{aligned} x + 2 \cdot y - 2 \cdot z &= 4 \\ -x - y + 4 \cdot z &= 3 \end{aligned}$$

   Bestimmen Sie auch hier alle Lösungen mit der selben Sorgfalt wie im vorigen Beispiel beschrieben.

5. Bei einem Baumstamm wird ein Umfang von $2,73\,\mathrm{m}$ und ein Durchmesser von $0,82\,\mathrm{m}$ gemessen. Hat er einen kreisförmigen Querschnitt?

6. Aus einer Torte mit einem Durchmesser von $28\,\mathrm{cm}$ wird ein Stück herausgeschnitten, sodass beim Umfang schließlich $5\,\mathrm{cm}$ fehlen. Wie groß ist der Winkel?

7. Zeigen Sie, dass die Summe aller Winkel in einem Dreieck stets ein gestreckter Winkel ist.
   Hinweis: Legen Sie durch die Spitze eine Parallele zur Grundlinie und verwenden Sie dann, dass Parallelwinkel gleich groß sind.

8. Es seien A, B und C drei Punkte auf einer Kreislinie mit Mittelpunkt M, sodass der der Mittelpunkt innerhalb des Dreiecks mit den Eckpunkten A, B, C liegt. Es sei γ der Winkel in diesem Dreieck beim Eckpunkt C. Betrachten wir ferner das Dreieck mit den Eckpunkten A, B, M sowie dessen Winkel ζ beim Eckpunkt M. Zeigen Sie

   $$\zeta = 2 \cdot \gamma.$$

   Schießen Sie daraus, dass die Größe des Winkels α bereits durch Verhältnis der Länge der Strecke von A nach B zum Kreisdurchmesser bestimmt ist, also unabhängig von P ist.
   Hinweis: Verbinden Sie M mit P, damit das große Dreieck in 3 kleinere aufgeteilt wird. Vergleichen Sie die entstehenden Winkel und verwenden Sie, dass in einem gleichschenkeligen Dreieck auch die entsprechenden Winkel gleich groß sind.