Algebra für Informatik (2015S)

4. Übungsblatt

für den 13. April 2015

1. Gegeben sind folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie:

   (a) $A + 2B$

   (b) $C \cdot D$ und $D \cdot C$

   (c) $A \cdot C$

   (d) $A \cdot D + 3D$

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie, falls definiert: A^2, A^3, A^T, $(A^T)^T$, $A \cdot A^T$, $A^T \cdot A$.

3. Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{k \times l}$ und $B, C \in \mathbb{R}^{l \times m}$ folgendes gilt

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C).$$

4. Zeigen Sie Satz 2.12.(1): $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, falls die Dimensionen passen.

5. Zeigen Sie dass für alle $A \in \mathbb{R}^{k \times l}$ und $s, t \in \mathbb{R}$ folgendes gilt

$$(s + t) \cdot A = s \cdot A + t \cdot A.$$

6. Finden Sie eine Matrix X, sodass $A \cdot X = B$, wobei $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 16 & -7 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$. (Hinweis: Bestimmen Sie jede Spalte von X durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.)

7. Finden Sie 3 verschiedene Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, welche mit allen anderen aus $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ vertauschbar sind, dass also für alle $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt: $A \cdot B = B \cdot A$.

8. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sodass $ad \neq bc$. Zeigen Sie, dass dann

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) = E_2$$

gilt.