Algebra für Informatik (2015S)

6. Übungsblatt

für den 27. April 2015

1. Ergänzen Sie die Gleichung
$$3x - 2y + 5z = 0$$
so zu einem Gleichungssystem mit drei Gleichungen, dass das System
   (a) keine Lösung
   (b) genau eine Lösung
   (c) genau zwei Lösungen
   (d) eine Gerade als Lösungsmenge
   (e) eine Ebene als Lösungsmenge

   hat.

2. Lösen Sie die Gleichungssysteme

   (a)
$$\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 3 - 2u \\ 2x + 14z + 4u &= 6 - 8y \\ 2 - x &= 2y + 3z + 2u \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 3 - 2u \\ 2x + 14z + 4u &= 8 - 8y \\ 2 - x &= 2y + 3z + 2u \end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 3 - 2u \\ 2x + 15z + 4u &= 6 - 8y \\ 2 - x &= 2y + 3z + 2u \end{aligned}$$

3. Lösen Sie das Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$
und geben Sie die Lösungsmenge parametrisiert an.

4. Zeigen oder widerlegen Sie: Sind v_1 und v_2 zwei Lösungen des Gleichungssystems
$$A \cdot x = b,$$
und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda + \mu = 1$, dann ist auch $\lambda v_1 + \mu v_2$ eine Lösung. Geben Sie dazu ein konkretes Beispiel an.

5. Bestimmen Sie die Zeilenstaffelform von
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Eine Mischung aus Kaffeesorte A zu 8,- EUR je kg mit Kaffeesorte B zu 5,- EUR je kg kostet insgesamt 275,- EUR. Vertauscht man dagegen die Mengen der beiden Sorten, so kostet die Gesamtmischung um 9,- EUR mehr. Wieviel kg jeder Sorte enthielt die ursprüngliche Mischung?

7. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungssysteme

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 67 \\ 21 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 66 \\ 21 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 13 & 12 \\ 4 & 22 & 16 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 47 \\ 74 \\ 21 \end{pmatrix}$

8. Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und $v \in \mathbb{R}^2$ sodass
$$A \cdot v = w.$$
Die Vektoren in den Spalten von A seien mit s_1 und s_2 bezeichnet. Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass
$$w = \lambda s_1 + \mu s_2.$$