Algebra für Informatik (2015S)

7. Übungsblatt

für den 11. Mai 2015

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jeder Unterraum T von $\mathbb{R}^n$ den Nullvektor $\vec{0} := (0, \ldots, 0)$ enthält.
2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $T := \{\vec{0}\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$?
3. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^2$? Erfüllen die Mengen jeweils (1) bis (3) aus Definition 4.1?
   (a) $M_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 0\}$.
   (b) $M_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 1\}$.
4. Zeigen Sie, dass ein Unterraum U des $\mathbb{R}^n$ mit zwei Punkten P_1 und P_2 auch jeden Punkt der Geraden durch P_1 und P_2 enthalten muss.
5. Seien A eine $m \times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $b \neq \vec{0}$. Kann
   $$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b\}$$
   ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ sein?
6. Gilt $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \in L(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -4 \end{smallmatrix}\right))$?
7. Gilt $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \in L(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix})$?
8. Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass nicht jedes $x \in \mathbb{R}^3$ in $L(v_1, v_2)$ liegt.