Algebra für Informatik (2015S)

8. Übungsblatt

für den 18. Mai 2015

1. Testen Sie jeweils, ob folgende Folgen von Vektoren linear abhängig sind. Wenn ja, finden Sie eine Linearkombination, die den Nullvektor ergibt, und bei der nicht jeder Vektor mit 0 multipliziert wird.

   (a) $(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix})$.

   (b) $(\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\10\\-10\end{pmatrix})$.

   (c) $(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix})$.

2. Sind die Vektoren $(\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\10\\-8\end{pmatrix})$ linear abhängig?

3. Sei $A = \begin{pmatrix}3 & 4 & -5\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

   (a) Ist $(3, 10, -8)$ im Zeilenraum von A?

   (b) Ist $(0, 1)$ im Zeilenraum von A?

   (c) Ist $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ im Spaltenraum von A?

4. Geben Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ an, sodass $(\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, v)$ linear unabhängig sind.

5. Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1-a\\0\end{pmatrix})$ linear abhängig?

   Gehen Sie folgendermaßen vor: Nehmen Sie an, es gibt $a, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sodass $\lambda\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1-a\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, und μ, λ nicht beide 0 sind. Zählen Sie alle Lösungen für a auf. Überprüfen Sie für jede Lösung die lineare Abhängigkeit von $(\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1-a\\0\end{pmatrix})$.

6. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, und (a, b) linear unabhängig. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) $c \in L(a, b)$

   (b) (a, b, c) sind linear abhängig.

7. Gibt es ein $v \in \mathbb{R}^3$, sodass $(\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}, \vec{0}, v)$ linear unabhängig sind?

8. Zeigen oder widerlegen Sie für $a, b, c \in \mathbb{R}^n$: Sind (a, b), (a, c) und (b, c) jeweils linear unabhängig, so sind auch (a, b, c) linear unabhängig.