Algebra für Informatik (2015S)

9. Übungsblatt

für den 2. Juni 2015

1. Bestimmen Sie jeweils eine Basis folgender Unterräume.
   (a) $\{r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r, s, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
   (b) $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + 2z = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
   (c) $\{\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2u - 5v = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
2. Finden Sie jeweils eine Basis folgender Unterräume.
   (a) $L(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix})$.
   (b) $L(\begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix})$.
   (c) $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$.
3. Sei U der durch $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^4$.
   (a) Ist $B = (a, b)$ eine Basis von U?
   (b) Erweitern sie B zu einer Basis C von $\mathbb{R}^4$.
4. Seien die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ eine Basis des Unterraums U. Zeigen Sie, dass auch $(a - \frac{1}{2}b, b)$ eine Basis von U ist.
5. Sei $n \in \mathbb{N}$, und $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $v_0, \ldots, v_n$ linear abhängig sind. Stellen Sie dazu das Gleichungssystem für eine mögliche Linearkombination auf, und überlegen Sie sich die Anzahl der Lösungen.
6. Bestimmen Sie für jeden der Zeilenräume $Z(A)$, $Z(B)$, $Z(C)$, $Z(D)$ eine

Basis und entscheiden Sie, welche dieser Zeilenräume gleich sind.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & -11 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

7. Bestimmen Sie eine Basis des Nullraums von

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. Bestimmen Sie für jede der Matrizen in Aufgabe 6 eine Basis des Nullraums. Welche Nullräume sind gleich?