Algebra für Informatik (2015S)

12. Übungsblatt

für den 22. Juni 2015

1. Zeigen Sie im Detail, dass die Kongruenz modulo n ($n \in \mathbb{N}$) transitiv ist, d.h., dass für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt:
$$a \equiv_n b \wedge b \equiv_n c \implies a \equiv_n c.$$
2. Finden Sie eine ganzzahlige Lösung für x und y in der Gleichung $ax + by = c$ mit
   (a) $a = 23$, $b = 17$, $c = 1$.
   (b) $a = 23$, $b = 17$, $c = 3$.
   (c) $a = 22$, $b = 16$, $c = 1$.
   (d) $a = 22$, $b = 16$, $c = 2$.
   (e) $a = 22$, $b = 16$, $c = 4$.
3. Finden Sie eine Lösung für die folgenden Kongruenzen:
   (a) $17x \equiv_{23} 1$
   (b) $23x \equiv_{17} 1$
   (c) $17x \equiv_{23} 3$
   (d) $16x \equiv_{22} 1$
   (e) $16x \equiv_{22} 6$
4. (a) Bestimmen Sie alle Zahlen zwischen 0 und 24, die modulo 24 invertierbar sind. Wieviele sind es?
   (b) Zeigen Sie: Ist a modulo n invertierbar, und sind $a \equiv b \pmod{n}$, dann ist auch b modulo n invertierbar.
5. Zeigen Sie, dass für alle x, y, z in einem kommutativen Ring gilt:
   (a) $(x + y)z = xz + yz$;
   (b) $(x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$. (Auch in allgemeinen Ringen schreibt man a^2 für $a \cdot a$ und $2 := 1 + 1$.)
6. Zeigen Sie, dass in einem Körper
   (a) stets $0 \neq 1$ gilt;
   (b) es für jedes x höchstens ein y mit $xy = 1$ geben kann.
7. Zeigen Sie, dass das Produkt zweier Elemente in einem Körper nur dann 0 ist, wenn einer der Faktoren 0 ist.
8. Sei
   (a) $n = 2$;
   (b) $n = 3$;
   (c) $n = 4$;
   (d) $n = 6$;
   (e) $n = 7$.

   Gibt es Zahlen a, b, sodass zwar $ab \equiv_n 0$, aber weder $a \equiv_n 0$ noch $b \equiv_n 0$?