Einführung in die Algebra, Übung 7

1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n(\mathbb{R})$ die Menge aller reellen Matrizen vom Format $n \times n$, " $+$ " die Addition und " $\cdot$ " die Multiplikation von Matrizen. Zeigen Sie:

   a. $M_n(\mathbb{R})$ ist ein Ring mit Einselement. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist der Ring kommutativ?

   b. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $M_n(\mathbb{R})$ einfach , d.h. $\{0\}$ und $M_n(\mathbb{R})$ sind die einzigen Ideale von $M_n(\mathbb{R})$.

2. Wir deuten durch $I \trianglelefteq R$ an, dass I ein Ideal in einem Ring R ist.

   Sei $R_1 \times R_2$ das direkte Produkt der Ringe R_1 und R_2 mit Einselement. Zeigen Sie:

   $I \trianglelefteq R_1 \times R_2 \Longleftrightarrow \exists I_1 \trianglelefteq R_1 \exists I_2 \trianglelefteq R_2 : I = I_1 \times I_2 = \{(i_1, i_2) \,|\, i_1 \in I_1, i_2 \in I_2\}$

3. Für welche $n, m \in \mathbb{N}$ ist $h : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_m, [x]_n \longrightarrow [x]_m$ ein Ringhomomorphismus? Wann ist h ein Mono-,Epi-, bzw. Isomorphismus?

4. Sei $h : R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie:

   a. $h(R) := \{h(r) \,|\, r \in R\}$ ist ein Unterring von S, d.h $h(R)$ ist bezüglich der

   Operationen in S abgeschlossen.

   b. $\ker(h) := \{r \in R \,|\, h(r) = 0\} \trianglelefteq R$

.