ÜBUNGSBLATT 9 AUS "EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA" - 28.5.2015

AUFGABEN:.

(1) Finden Sie alle Elemente der S_4 in Zyklenschreibweise.

(2) Ist jede zyklische Gruppe abelsch? Ist jede abelsche Gruppe zyklisch?

(3) Zeigen Sie, dass es zu jeder natürlichen Zahl n eine zyklische Gruppe mit n Elementen gibt und dass diese dann zur $(\mathbb{Z}_n, +)$ isomorph sein muß.

(4) G sei eine Gruppe mit 72997 Elementen. Finden Sie alle Untergruppen. [Hinweis: Bevor Sie alle 2^{72997} Teilmengen durchsuchen, denken Sie lieber kurz nach!]

(5) Finden Sie in der Gruppe Q_3 aus Aufgabe 5 vom Blatt 8 die Ordnung jedes Elements. Vergewissern Sie sich, dass in allen Fällen der Satz vom Fermat auch wirklich stimmt.

LÖSUNGEN:.

(1) *S_4 besteht aus id, den 6 Transpositionen* $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$, *den 8 Dreierzyklen* $(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,3,2)$, $(1,3,4)$, $(1,4,2)$, $(1,4,3)$, $(2,3,4)$, $(2,4,3)$, *den 6 Viererzyklen* $(1,2,3,4)$, $(1,2,4,3)$, $(1,3,2,4)$, $(1,3,4,2)$, $(1,4,2,3)$, $(1,4,3,2)$, *sowie 3 Produkten von Transpositionen:* $(1,2)(3,4)$, $(1,3)(2,4)$, $(1,4)(2,3)$. *[Letztere sind die "kleinsten" Permutationen, die keine Zyklen sind.]*

(2) *a): Ja. Ist g erzeugendes Element von G, so sind zwei typische Elemente $x, y \in G$ von der Form $x = g^a, y = g^b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und wir erhalten $xy = g^a g^b = g^{a+b} = g^{b+a} = yx$; b):Nein: die Gruppe in Bsp. 4.12 der Vorlesung (es ist die $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$) ist abelsch, kann aber nicht zyklisch sein, weil alle Elemente die Ordnung 2 haben.*

(3) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{Z}_n, +)$ zyklisch von der Ordnung n. Ist G ebenfalls zyklisch mit n Elementen und erzeugendem Element g , so ist die Abbildung $i : G \to \mathbb{Z}_n, g^a \mapsto a$ ein Isomorphismus.*

(4) *72997 ist prim. Nach dem Satz von Lagrange (4.32) hat jede Untergruppe ein Element oder gleich 72997 Elemente. Die einzigen Untergruppen sind daher $\{1\}$ und G .*

(5) *Aus der Verknüpfungstabelle sieht man schnell:* 1 *hat die Ordnung* 1, a^2 *hat die Ordnung 2, alle anderen haben Ordnung 4. Und 1,2,4 sind Teiler von 8.*