Einführung in die Algebra, 3.Übungstest, 08.10.2015

Name Matrikelnr. Studienkennzahl Übungsgruppe

1. Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppen

   (3P.) a. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

   (2P.) b. $\mathbb{Z}_{19}$

   Begründen Sie Ihre Antworten.

   Lösung: a. Sei $H \neq \{(0,0)\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Falls $(1,1)$ oder $(1,2)$ in H liegt, dann gilt $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Sonst gilt $H = \{0\} \times \mathbb{Z}_3$ oder $H = \mathbb{Z}_2 \times \{0\}$.

   Alle Untergruppen sind daher durch $\{(0,0)\}, \{0\} \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2 \times \{0\}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ gegeben.

   b. Die Ordnung jeder Untergruppe teilt die Primzahl 19. Somit sind $\{0\}$ und $\mathbb{Z}_{19}$ die einzigen Untergruppen.

2. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, H eine nichtleere Teilmenge von G. Zeigen Sie, oder widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels:

   (2P.) a. Wenn für alle $h_1, h_2 \in H$ auch $h_1 \cdot h_2 \in H$ gilt, dann ist H eine Untergruppe von G.

   (3P.) b. Wenn für alle $h \in H$ auch $h^{-1} \in H$ gilt, dann ist H eine Untergruppe von G.

   Lösung: a. Sei $G = (\mathbb{Z}, +), H = \mathbb{N}$. H ist abgeschlossen bzgl. $+$, aber keine

   Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.

   b. Sei $G = (\mathbb{Z}, +), H = \{-1, 0, 1\}$. Für alle $h \in H$ gilt auch $-h \in H$, aber H ist keine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.

3. (5P.) $H = \{id, (1,2,3,4), (1,3) \circ (2,4), (1,4,3,2)\}$ ist eine Untergruppe

   der Gruppe S_4. Zeigen Sie durch explizite Angabe eines Isomorphismus, dass

   $H \cong (\mathbb{Z}_4, +)$ gilt. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

   Lösung: Sei $g = (1,2,3,4) \in H$. Dann gilt $H = \{g, g^2, g^3, g^4 = id\}$. Die Abbildung $h : (\mathbb{Z}_4, +) \longrightarrow H$, $h(0) := id, h(1) := g, h(2) := g^2, h(3) := g^3$

   ist ein Gruppenhomomorphismus, da für alle $i, j \in \mathbb{Z}_4$,

   $h(i+j) = g^{i+j} = g^i \cdot g^j = h(i) \circ h(j)$ gilt. Wegen der Bijektivität von h ist h ein Gruppenisomorphismus.

4. (5P) Ist die Gruppe $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abelsch? Ist G zyklisch? Bestimmen Sie eine möglichst kleine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, sodass $\langle S \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gilt, wobei $\langle S \rangle$ die von S erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist.

   Begründen Sie Ihre Antworten.

   Lösung: G ist bzgl. der komponentenweisen Addition eine abelsche Gruppe, da für $(x,y), (u,v) \in G$, $(x,y) + (u,v) = (x+u, y+v) = (u+x, v+y) = (u,v) + (x,y)$ gilt.

Angenommen, $G = \langle (x, y) \rangle$ ist eine zyklische Gruppe. Dann gibt es $0 \neq n, m \in \mathbb{Z}$, sodass $n.\,(x, y) = (1, 0)$ und $m.\,(x, y) = (0, 1)$ gilt. Daraus folgt $x = y = 0$, also $G = \{(0, 0)\}$.

G besitzt also kein erzeugendes Element. Eine möglichst kleine Menge S, die $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ erzeugt, ist $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$.