3. ÜBUNGSSTUNDE - 26.3.2015

(1) Wir haben eine seltsame Idee und wollen die schrecklich schwierige Aufgabe, 19+23 zu addieren, komplizierter lösen. Es ist ja egal, ob man dies im Bereich der reellen Zahlen, der rationalen Zahlen oder der natürlichen Zahlen macht. Man kann es auch modulo n rechnen, vorausgesetzt, n ist sicher größer als die erwartete Summe. Das kann man weiter ausbauen. Wir zerlegen das n unserer Wahl in Primzahlpotenzen: $n = p_1^{t_1} \dots p_k^{t_k}$. Wir nehmen sodann die Zahlen $a, b, \dots$, die wir addieren oder multiplizieren wollen und berechnen ihre Reste $[a]_{p_1^{t_1}}$ etc. nach Division durch $p_1^{t_1}$, u.s.w. Wir machen dies für unser Beispiel $19 + 23$ und wählen $n = 60 = 4 * 3 * 5$:

19 gibt die Reste $([19]_4, [19]_3, [19]_5) = ([3]_4, [1]_3, [4]_5)$

23 gibt die Reste $([23]_4, [23]_3, [23]_5) = ([3]_4, [2]_3, [3]_5)$.

Kann man sagen, dass $19 + 23$ dann die Reste $([6]_4, [3]_3, [7]_5) = ([2]_4, [0]_3, [2]_5)$ hat, dass man also die Reste in jeder Komponente einfach addieren kann?

Gilt dasselbe auch für's Subtrahieren und Multiplizieren?

Ja, und wie bekommt man dann das ersehnte $19 + 23$?

Und macht das alles überhaupt Sinn?

2. Aufgabe (1) von 1.24

3. Aufgabe (1) von 1.28

4. Aufgabe (1) von 1.33

5. Wir schreiben das Jahr 2015. Die Zahl 403 teilt 2015, aber auch 2821, 9672 und 4433. Zeigen Sie OHNE RECHNUNG, dass 403 dann auch die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 7 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

teilt. Können Sie dieses Ergebnis verallgemeinern?