| |
|---|
| **Algebra und Diskrete Mathematik**<br>**Sommersemester 2015**<br>**1. Test, 13. April 2015** |
| Familienname: Rumpel ............ Vorname: Stilzchen ............ |
| Matrikelnr.: 08/15 ............ Übungsgruppe: ja ............ |

Es sind keine Unterlagen und keine elektronischen Hilfsmittel erlaubt.

(1) Finden Sie alle Lösungen von

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{21} \\ x &\equiv 9 \pmod{10}. \end{aligned}$$

ggT$(21, 10) = 1$, also lösbar

$1 = 1 \cdot 21 - 2 \cdot 10 \qquad 1 \cdot (3-9)$

$x_0 = 3 + 6 \cdot 21 = 129$

$L = \{129 + 210 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(2) Jemand ist am Ende eines Besuchs in Russland und möchte sein Restgeld von 1470 Rubel vollständig aufbrauchen, und zwar für Vodka (1 Flasche zu 231 Rubel) und Bände einer Algebra - Lehrbuchserie zum Preis von je 111 Rubel. Ist dies möglich, und wenn ja, wie?

→ "Diophant." Gleichung $231x + 111y = 1470$

$ggT(231, 111) = 3 = 231 \cdot (-12) + 111 \cdot 25 \mid \cdot \frac{1470}{3} \Rightarrow 1470 = 231 \cdot (-5880) + 111 \cdot 12250$

$x_0 = -5880$ und $y_0 = 12250$ sind aber nicht beide $\geq 0$

Alle Lösungen: (nach 1.22)

$x = x_0 + \frac{b}{d} t = -5880 + \frac{111}{3} t = -5880 + 37t$

$y = y_0 - \frac{a}{d} t = 12250 - \frac{231}{3} t = 12250 - 77t$

$-5880 + 37t$ wird $\geq 0$ für $t = 159$

dann ist $x = 3$ und $y = 7$

Also: 3 Flaschen Vodka und 7 Bücher kaufen!

Andere Möglichkeit:

$231x + 111y = 1470$ modulo 111: $9x \equiv 27 \mod 111$

gibt $9x = 27$ oder $9x = 360$ oder ...

modulo 231: $111y \equiv 84 \mod 231$

gibt $111y = 777$ oder ...

also $y = 7$ oder ...

[Bem.: $9x \equiv 27 \mod 111$ heißt ja: $111 / 9x - 27$, was zu $37 / 3x - 9$, also zu $3x \equiv 9 \pmod{37}$ äquivalent ist. Geht dann schneller.]

(3) Von der Zahl $n$ wissen Sie, dass sie 3 Primfaktoren $p, q, r$ hat und dass $n = p^3 q^4 r^2$ gilt. Wieviele Teiler hat $n$?

Alle Teiler: $p^a \cdot q^b \cdot r^c$ mit $0 \leq a \leq 3$ (4 mögl. a)

$0 \leq b \leq 4$ (5 Stück)

$0 \leq c \leq 2$ (3 Stück)

$4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ Teiler in $\mathbb{N}$

(in $\mathbb{Z}$: alles $\pm$, macht 120 Stück)

(4) Zeigen Sie, dass für die drei ganzen Zahlen $a, b, c$ gilt: $ggT\left(a, ggT\left(b, c\right)\right) = ggT\left(ggT\left(a, b\right), c\right)$

1. Möglichkeit: $x / a \wedge x / ggT(b, c) \Rightarrow x/a \wedge x/b \wedge x/c$
$\Rightarrow x / ggT(a, b) \wedge x / c$

Jeder Teiler der linken Seite ist also ein Teiler der rechten Seite (und umgekehrt), also sind auch die ggT's gleich

2. Möglichkeit: Für $d := ggT(a, ggT(b, c))$ gilt (wie in 1.): $d / ggT(ggT(a, b), c) =: d'$, ebenso $d' / d$, also $d = d'$

3. Möglichkeit: über Primfaktorzerlegung (dann muß man noch $\min(r, \min(s, t)) = \min(r, s, t) = \min(\min(r, s), t)$ zeigen).

4. Möglichkeit: zu der 2. Mögl. zeigen: $d \leq d'$ und $d' \leq d$