Einführung in die Algebra, Übung 4 am 16.04.2015

1. Ist der Polynomring $\mathbb{Z}[x]$

   a. Ein Integritätsbereich?

   b. Ein Hauptidealbereich?

   Lösung: a. Sei $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_n \neq 0, q = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i, b_m \neq 0$. In $p \cdot q$ ist der Koeffizient der höchsten Potenz $a_n b_m \neq 0$.Daher ist $\mathbb{Z}[x]$ ein Integritätsbereich.

   b. Sei $I := \langle 2, 3x \rangle = \{x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 3x \,|x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[x]\}$. Wäre $I = (c)$ ein Hauptideal, dann folgt aus $c\,|2$ $c = 2$ oder $c = 1$.Es gilt aber $3x \notin (2)$ und die Gleichung

   $x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 3x = 1$ hat keine Lösung in $\mathbb{Z}[x]$.

2. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $I \trianglelefteq R, J \trianglelefteq R$ Ideale von R.

   Zeigen Sie:

   a. $I + J := \{i + j\,|i \in I, j \in J\} \trianglelefteq R$. Zeigen Sie, dass $I + J$ das von der Menge $I \cup J$ erzeugte Ideal ist.

   b. $\sqrt{I} := \{x \in R\,|x^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} \trianglelefteq R$ und $I \subseteq \sqrt{I}$.

   Lösung: a. Für $r \in R, i, k \in I, j, l \in J$ gilt $r(i + j) = ri + rj \in I + J$ und

   $(i + j) + (k + l) = (i + k) + (j + l) \in I + J$, also ist $I + J \trianglelefteq R$. Da $I + J$ die Menge $I \cup J$ enthält, gilt $\langle I \cup J \rangle \subseteq I + J$. Für alle $i \in I, j \in J$ ist $i + j \in \langle I \cup J \rangle$, also $I + J \subseteq \langle I \cup J \rangle$.

   b. Für $r \in R, i, j \in \sqrt{I}$ gibt es $n, m \in \mathbb{N}$, sodass i^n, j^m Elemente von I sind. Dann gilt $(ri)^n = r^n i^n \in I$, also $ri \in I$. Wegen der Kommutativität von R

   gilt $(i + j)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} i^k j^{n+m-k}$. Für $k < n$ ist $n+m-k > m$, also $j^{n+m-k} \in I$, für $k \geq n$ ist $i^k \in I$.Insgesamt folgt $i + j \in I$.

3. Zeigen Sie 2.7,Nr.3.

   Lösung: Sei $I \trianglelefteq R, I \neq R$ und $S := \{J \trianglelefteq R\,|I \subseteq J, J \neq R\}$. $S \neq \varnothing$. Für eine Kette $\{J_\alpha\,|\alpha \in A\}$ in S enthält $J := \bigcup \{J_\alpha\,|\alpha \in A\}$ das Ideal I. Da für alle $\alpha \in A$ $1 \notin J_\alpha$ ist, folgt $1 \notin J$. Für $i, j \in J$ gibt es $\alpha, \beta \in A$, sodass $i \in J_\alpha, j \in J_\beta$ gilt. Falls $J_\alpha \subseteq J_\beta$ gilt, dann folgt $i + j \in J_\beta \subseteq J$.

   Für $r \in R$ ist $ri \in J_\alpha \subseteq J$. Somit ist $J \trianglelefteq R$ und eine obere Schranke der Kette $\{J_\alpha\,|\alpha \in A\}$ in S. Nach dem Lemma von Zorn gibt es mindestens ein maximales

   Element in S.

4. Ein kommutativer Ring R mit Einselement heißt Körper, wenn $|R| \geq 2$ ist und jedes $0 \neq r \in R$ invertierbar ist.

   Zeigen Sie 2.11,Nr.4.

   Lösung: Sei R ein einfacher kommutativer Ring mit Einselement. Für alle $0 \neq r \in R$ ist $Rr \trianglelefteq R$ und $Rr \neq 0$ wegen $r \in R$. Also gilt $Rr = R$, d.h es gibt ein $s \in R$ mit $sr = 1$. Somit ist R ein Körper. Umgekehrt sei $0 \neq I$ ein Ideal eines Körpers. Für $0 \neq i \in I$ und $r \in R$ gilt $r = r\, i^{-1} i \in I$, d.h

   $I = R$. R ist daher einfach.

5. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement 1. Dann ist die Menge der formalen Potenzreihen $R[[x]] := \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \,| a_i \in R\}$ mit den Operationen $(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i) + (\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i) := \sum_{i=0} (a_i + b_i) x^i$ und $(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ mit $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$

   für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ein kommutativer Ring mit Einselement 1. Zeigen Sie:

   $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]$ ist invertierbar$\Longleftrightarrow a_0$ ist in R invertierbar

   Lösung: Sei $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]$. Falls $(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i) \cdot (\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i) = 1$ ist, dann gilt $a_0 b_0 = 1$ und $\sum_{i+j=k} a_i b_j = 0$ für alle $k \geq 1$. Diese Gleichungen sind genau dann lösbar, wenn a_0 invertierbar ist. Dann gilt $b_0 = a_0^{-1}$ und $b_k = -a_0^{-1} \sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i}$ für $k \geq 1$.

.