Lösungen zum Übungsblatt 8 aus „Einführung in die Algebra“ vom 21.05.2015

1. Sei $(G, \cdot, i, e)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in G$ die Gleichung $a \cdot x = b$ genau eine Lösung hat und folgern Sie daraus, dass stets $i(e) = e$ und $i(x \cdot y) = i(y) \cdot i(x)$ für alle $x, y \in G$ gilt.

   Lösung. Zunächst gilt

   $$a \cdot x = b \Leftrightarrow i(a) \cdot (a \cdot x) = i(a) \cdot b \Leftrightarrow (i(a) \cdot a) \cdot x = i(a) \cdot b \Leftrightarrow x = i(a) \cdot b.$$

   Daher gilt etwa $e \cdot x = e \Leftrightarrow x = i(e) \cdot e = i(e)$. Da die Gleichung aber offensichtlich auch von e gelöst wird, muss wegen der Eindeutigkeit der Lösung $i(e) = e$ gelten. Ebenso gilt $(x \cdot y) \cdot z = e \Leftrightarrow z = i(x \cdot y) \cdot e = i(x \cdot y)$. Diese Gleichung wird wegen

   $$(x \cdot y) \cdot (i(y) \cdot i(x)) = x \cdot (y \cdot i(y)) \cdot i(x) = x \cdot e \cdot i(x) = x \cdot i(x) = e$$

   aber auch von $i(y) \cdot i(x)$ gelöst, was $i(x \cdot y) = i(y) \cdot i(x)$ beweist. □

Definition 1 *Seien g, h Elemente einer Gruppe $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$. Dann nennen wir g und h konjugiert, falls es ein $x \in G$ gibt mit $g = xhx^{-1}$. Wir schreiben dann $g \sim h$.*

2. Zeigen Sie, dass die oben definierte Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Warum ist die Relation $\sim$ nur für nicht-abelsche Gruppen interessant?

   Lösung. Für alle $g \in G$ gilt $g = 1 \cdot g \cdot 1^{-1}$, also $g \sim g$; somit ist die Reflexivität gezeigt. Aus $g \sim h$ folgt die Existenz eines $x \in G$ mit $g = xhx^{-1}$. Daraus folgt $h = x^{-1}gx = x^{-1}g(x^{-1})^{-1}$, also gilt auch $h \sim g$ und die Relation ist symmetrisch. Es bleibt die Transitivität zu zeigen. Wir nehmen dazu an, dass $g \sim h$ und $h \sim f$ für $g, h, f \in G$. Dann gibt es $x, y \in G$ mit $g = xhx^{-1}$ und $h = yfy^{-1}$. Daraus folgt $g = x(yfy^{-1})x^{-1} = (xy)f(xy)^{-1}$, also $g \sim f$. Für abelsche Gruppen ist $\sim$ einfach die Gleichheitsrelation. □

3. Wie jede Äquivalenzrelation teilt die Konjugationsrelation $\sim$ die Elemente einer Gruppe G in mehrere Äquivalenzklassen auf. Finden Sie diese Äquivalenzklassen für die Permutationsgruppe S_3 (vgl. Beispiel 4.13 im Skript).

   Lösung. Das Element id bildet klarerweise eine eigene Äquivalenzklasse. Um herauszufinden, welche Elemente von S_3 etwa zu (13) konjugiert sind, berechnen wir $\sigma \circ (13) \circ \sigma^{-1}$ für alle $\sigma \in S_3$. Man sieht dann, dass dabei nur die Permutationen (13), (12) und (23) herauskommen. Es gilt zum Beispiel $(231) \circ (13) \circ (231)^{-1} = (12)$ und $(312) \circ (13) \circ (312)^{-1} = (23)$. Die beiden übrigen Permutationen (231) und (312) bilden die dritte und letzte Äquivalenzklasse. □

Definition 2 *Seien $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ und $(H, \odot, ^{-1_H}, 1_H)$ Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ heißt Gruppenhomomorphismus genau dann, wenn*

1. $\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \odot \varphi(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G$,
2. $\varphi(g_1^{-1}) = (\varphi(g_1))^{-1_H}$,
3. $\varphi(1) = 1_H$. (vgl. Definition 4.20 im Skript).

Ein bijektiver Gruppenhomomorphismus heißt (Gruppen-)Isomorphismus. Zwei Gruppen G und H heißen isomorph, wenn es zwischen ihnen einen Isomorphismus gibt.

4. Zeigen Sie, dass die beiden zyklischen Gruppen $(\mathbb{Z}_n, +)$ und $G_n := (\{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}, \cdot)$ aus Beispiel 4.8 isomorph sind. Überlegen Sie dafür zunächst, wie die Elemente von G_n aussehen (Stichwort: Einheitswurzeln).

   Lösung. Die Elemente von G_n sind gegeben durch $\{\xi_k : k \in \{0, \dots, n-1\}\}$, wobei $\xi_k = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}k}$. Dabei ist $\xi_0 = 1$ das neutrale Element von G_n. Wir definieren die Abbildung

   $$\varphi : \mathbb{Z}_n \to G_n : [k]_n \mapsto \xi_k.$$

   Wegen
   $$\varphi([k+zn]_n) = \xi_{k+zn} = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}(k+nz)} = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}k} e^{2\pi \mathrm{i} z} = \xi_k$$
   für alle $z \in \mathbb{Z}$ ist φ unabhängig vom gewählten Repräsentanten von $[k]_n$ und somit wohldefiniert. Die Homomorphismuseigenschaften sind sofort nachgerechnet und die Bijektivität ist auch offensichtlich. □

5. Eine bequeme Methode, eine Gruppe anzugeben, sind definierende Relationen. Wir betrachten die Trägermenge
   $$\{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$
   mit den definierenden Relationen $a^4 = 1$, $b^2 = a^2$ und $ba = a^3b$. Die entstehende Gruppe nennen wir Q_3. Stellen Sie die Gruppentafel von Q_3 auf. Gilt $Q_3 = D_4$?

   Lösung. Die Gruppentafel ist gegeben durch

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	a^2	a	1	a^3
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a^3	a^2	a	1
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	1	a^3	a^2	a
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a	1	a^3	a^2

   Diese Gruppe ist nicht die Diedergruppe, denn die abweichende definierende Relation $b^2 = a^2$ führt dazu, dass etwa $b(ab) = (ba)b = (a^3b)b = a^3b^2 = a^3a^2 = a^4a = a$ in Q_3, aber in D_4, wo $b^2 = 1$, erhält man stattdessen $b(ab) = (ba)b = (a^3b)b = a^3b^2 = a^3$. □