Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
Übungsblatt 11

18.06.2015

1. Unter einer Partition einer natürlichen Zahl n versteht man die Darstellung dieser Zahl als Summe von natürlichen Zahlen größer gleich 1. Wir betrachten zwei Partitionen als gleich, wenn genau die gleichen Summanden vorkommen (die Reihenfolge ist egal). Mit $P(n)$ bezeichnen wir die Anzahl aller verschiedener Partitionen von n. Zum Beispiel sind 3, $2+1$ und $1+1+1$ die einzigen drei Partionen der Zahl 3, also $P(3) = 3$. Bestimmen Sie $P(n)$ für $n = 4, 5, 6$!

2. Aus dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen kann man folgendes „Rezept“ zur Bestimmung aller abelschen Gruppen der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ herleiten:

   - Finden Sie die Primfaktorzerlegung von n; also $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$.
   - Finden Sie für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ alle Partitionen von α_i und bilden Sie für jede Partition $\alpha_i = \ell_1 + \cdots + \ell_m$ das direkte Produkt $\mathbb{Z}_{p_i^{\ell_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_i^{\ell_m}}$.
   - Wählen Sie für jedes α_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, eine Partition und das dazugehörige direkte Produkt aus Schritt 2 aus und bilden Sie das direkte Produkt davon. Wenn Sie alle möglichen Kombinationen durchlaufen, erhalten Sie alle (paarweise nicht isomorphen) abelschen Gruppen der Ordnung n.

   Wie viele abelsche Gruppen der Ordnung $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ gibt es also (bis auf Isomorphie)? Geben Sie eine allgemeine Formel an und berechnen Sie damit die Anzahl der abelschen Gruppen der Ordnung 15552 (bis auf Isomorphie).

3. Verwenden Sie das „Rezept“ aus Beispiel 2, um alle abelschen Gruppen der Ordnung 100 explizit anzugeben. Vereinfachen Sie diese mit Hilfe der Isomorphie $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ für $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ so weit wie möglich. *(Beispiel: Die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$, weil $\mathrm{ggT}(2, 3) = 1$, aber nicht isomorph zu $\mathbb{Z}_{12}$, weil $\mathrm{ggT}(2, 6) = 2$.)*

4. Sei (V, E, I) ein Graph. Zeigen Sie $|I| = \sum_{v \in V} \mathrm{Grad}(v)$ sowie $|I| = 2 \cdot |E|$ und folgern Sie daraus, dass jeder Graph eine gerade Anzahl von Knoten ungeraden Grades hat.

5. Wir wollen eine Österreichkarte mit den Bundesländern so färben, dass zwei Bundesländer, die eine gemeinsame Grenze haben, verschiedene Farben haben (behandeln Sie Osttirol wie ein eigenes Bundesland). Übersetzen Sie diese Aufgabe in ein graphentheoretisches Problem und finden Sie eine geeignete Färbung . Wieviele Farben brauchen Sie höchstens? Überprüfen Sie an Ihrem „Österreich-Graphen“, ob die Eulersche Flächenformel (Satz 6.11) tatsächlich erfüllt ist.