Einführung in die Algebra, 3. Übungstest, 22.06.2015

1. (5P.) Gegeben sind die Gruppen $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ und $(\mathbb{Q},+)$. Bestimmen Sie in diesen Gruppen $\left\langle \frac{1}{2}\right\rangle$, die von $\frac{1}{2}$ erzeugte Untergruppe.

   Lösung: In $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$: $\left\langle \frac{1}{2}\right\rangle = \{2^z \,|\, z\in\mathbb{Z}\}$, da mit $\frac{1}{2}$ auch alle Potenzen $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ und deren Inverse $2^n, n\in\mathbb{N}$, in der erzeugten Untergruppe liegen müssen. Die Potenzen $\{2^z \,|\, z\in\mathbb{Z}\}$ bilden selbst schon eine Gruppe.

   In $(\mathbb{Q},+)$: $\left\langle \frac{1}{2}\right\rangle = \left\{\frac{z}{2} \,|\, z\in\mathbb{Z}\right\}$, da mit $\frac{1}{2}$ auch alle Vielfachen $\frac{n}{2}$ und deren Inverse $-\frac{n}{2}$, $n\in\mathbb{N}$, in der erzeugten Untergruppe liegen müssen. $\left\{\frac{z}{2} \,|\, z\in\mathbb{Z}\right\}$ bildet selbst schon eine Gruppe.

2. a. (2P.) Bildet $H := \{(2,3), id\}$ eine Untergruppe der Gruppe S_3? Begründen Sie Ihre Antwort.

   b. (3P.) Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim_H$.

   Lösung: a. Es gilt $(2,3)\circ(2,3) = id, id\circ(2,3) = (2,3)\circ id = (2,3), id\circ id = id$. Somit ist H bzgl $\circ$ abgeschlossen und alle Inversen von Elementen von H liegen wieder in H. H ist also eine Untergruppe der S_3.

   b. Nach dem Satz von Lagrange gibt es drei Äquivalenzklassen mit jeweils

   zwei Elementen. Durch Probieren findet man, dass $id, (1,2), (1,3)$ in verschiedenen

   Äquivalenzklassen liegen. $id\circ H = H, (1,2)\circ H = \{(1,2),(1,2,3)\}$,

   $(1,3)\circ H = \{(1,3),(1,3,2)\}$ sind also die Äquivalenzklassen.

3. Sei p eine Primzahl.

   a. (2P.) Zeigen Sie: Jede Gruppe der Ordnung p ist zyklisch.

   b. (3P.) Geben Sie ein Beispiel für eine nichtzyklische Gruppe der Ordnung p^2.

   Lösung: a. Für alle $g\in G$ ist $ord(g)$ ein Teiler von $|G| = p$. Da p eine Primzahl ist, gilt $|\langle g\rangle| = ord(g) = p$ für alle $1\neq g\in G$, d.h $\langle g\rangle = G$.

   b. Sei $G = \mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$. Falls $\langle(x,y)\rangle = G$ gilt, dann hat (x,y) die Ordnung p^2. Es gilt aber $p\cdot(x,y) = (px,py) = (0,0)$.

4. (5P.) Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks mit drei Farben zu färben, falls zwei Färbungen als gleich angesehen werden, wenn sie durch eine Drehung des Fünfecks ineinander übergeführt werden können.

   Lösung: Sei G die Gruppe der Drehungen des Fünfecks. $G = \{d, d^2, d^3, d^4, d^5 = id\}$, wobei d die Drehung um $72°$ ist. G wirkt auf der Menge der Färbungen

   $X = \{x : \{1,2,3,4,5\}\longrightarrow\{r,b,g\}\}$ durch $(g\cdot x)(z) := x(g^{-1}(z)), z\in\{1,2,3,4,5\}$.

   Dann gilt: $|Fix(id)| = |X| = 3^5, |Fix(d^i)| = 3$ für $i\in\{1,2,3,4\}$. Nach dem Frobenius-Burnside Lemma gilt, dass die Anzahl der verschiedenen Färbungen gleich $\frac{1}{|G|}\cdot\sum_{g\in G}|Fix(g)| = \frac{1}{5}\cdot(3^5+3+3+3+3) = 51$ ist.