Kommutative Algebra
1. Übungsblatt für den 10. März 2015

(1) (Ideale) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und I ein Ideal in R. Zeigen Sie, dass $I = R$ genau dann, wenn $1 \in I$.

(2) (Erzeugen von Idealen) Bestimmen Sie jeweils, ob das von der Menge S erzeugte Ideal $\langle S \rangle$ des Rings R gleich dem ganzen Ring R ist!
   (a) $R = \mathbb{Z}$, $S = \{60, 105, 70, 42\}$.
   (b) $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(2,1), (1,2)\}$.
   (c) $R = \mathbb{Z}_{91}$, $S = \{[8]_{91}\}$.

(3) (Ideale) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und seien I, J Ideale von R. Zeigen Sie, dass auch

$$I + J := \{i + j \,|\, i \in I, j \in J\}$$

ein Ideal von R ist.

(4) Ein kommutativer Ring mit Eins R heißt *Hauptidealring*, wenn jedes Ideal I von R ein *Hauptideal* ist, d. h. die Form $I = (r)$ für ein $r \in R$ hat. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[x]$ ein Hauptidealring ist.

(5) Ist $\mathbb{Z}[x]$ ein Hauptidealring?