Kommutative Algebra
2. Übungsblatt für den 17. März 2015

(6) Bestimmen Sie alle invertierbaren, primen und irreduziblen Elemente von $\mathbb{Z}_4$. Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der Relation $\sim$ (Assoziiertheit). Ist $\mathbb{Z}_4$ ein Integritätsbereich?

(7) Ist $t^4 + 1$ irreduzibel in $\mathbb{R}[t]$ bzw. in $\mathbb{Q}[t]$?

(8) (Direkte Produkte und Faktorringe)
   (a) Geben Sie jedes Hauptideal von $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ durch seine Elemente an.
   (b) Sei $r := (0, 2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. Geben Sie die Elemente von $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/(r)$ explizit an.

(9) (Faktorringe) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und sei I ein Ideal von R. Zeigen Sie, das für alle $r, s, t \in R$ gilt:

$$r + I = s + I \quad \Leftrightarrow \quad r - s \in I,$$
$$r + I = s + I \quad \Rightarrow \quad rt + I = st + I.$$

(10) (Invertierbare Elemente) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie:
   (a) Das Produkt invertierbarer Elemente ist wieder invertierbar.
   (b) Ein Element $r \in R$ ist genau dann invertierbar, wenn das von r erzeugte Ideal (r) gleich R ist.

(11) (Einfache Ringe) Ein Ring R ist *einfach*, wenn er keine Ideale außer $\{0\}$ und R hat. Zeigen Sie, dass folgende beiden Behauptungen äquivalent sind:
   (a) R ist ein einfacher kommutativer Ring mit Eins, und $|R| \geq 2$.
   (b) R ist ein Körper.