Algebra für Informatik (2016S)

2. Übungsblatt, mit Lösungen

für den 4. April 2016

1. Gegeben seien die beiden Vektoren
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie
   (a) $\langle \vec{u}\,,\, \vec{v} \rangle$;
   (b) $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$;
   (c) den von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossenen Winkel α (in Grad und Radiant);
   (d) $\cos\alpha$, $\sin\alpha$.

   Lösung:
   $\langle \vec{u}\,,\, \vec{v} \rangle = 5 \cdot (-5) + 12 \cdot 2 = -1$.
   $\|\vec{u}\| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.
   $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29} \approx 5.385165$.
   $\cos\alpha = \dfrac{\langle \vec{u}\,,\, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \dfrac{-1}{5 \cdot \sqrt{29}} \approx 0.745241$.
   $\alpha \approx 1.607944 \approx 92.1284°$.
   $\sin\alpha \approx 0.99931$. $\square$

2. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ die folgenden Eigenschaften besitzt:
   (a) Für alle Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ und reellen Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt
   $$\langle \lambda u\,,\, v \rangle = \lambda \langle u\,,\, v \rangle = \langle u\,,\, \lambda v \rangle.$$
   (b) Für alle Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt
   $$\langle u + v\,,\, w \rangle = \langle u\,,\, w \rangle + \langle v\,,\, w \rangle.$$

3. (Übungsaufgabe 1.6.5 im Skriptum) Verwenden Sie das Skalarprodukt, um zu beweisen, dass in jedem Parallelogramm die Summe der Quadrate aller Seitenlängen gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalenlängen ist.

   Lösung:
   Aufspannende Vektoren: $\vec{a}, \vec{b}$.
   $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{f} = \vec{a} - \vec{b}$.
   $\|\vec{e}\|^2 = \langle \vec{a} + \vec{b}\,,\, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}\,,\, \vec{a} \rangle + 2\langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}\,,\, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|^2 + 2\langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}\|^2$.
   $\|\vec{f}\|^2 = \langle \vec{a} - \vec{b}\,,\, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}\,,\, \vec{a} \rangle - 2\langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}\,,\, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|^2 - 2\langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}\|^2$.
   $\|\vec{e}\|^2 + \|\vec{f}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$. $\square$

4. Ein Fußgänger startet im Nullpunkt und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h in Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Ein Radfahrer startet eine halbe Stunde später im Nullpunkt und verfolgt ihn mit 20 km/h. Nach wievielen Minuten und wo holt der Radfahrer den Fußgänger ein und wie weit sind beide dabei vom Start entfernt?

   Lösung:

   Position des Fußgängers: $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} (t + \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} t$

   Position des Radfahrers: $\begin{pmatrix} 16 \\ -12 \end{pmatrix} t$

   $\begin{pmatrix} 2 \\ -3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \end{pmatrix} t$ ergibt $t = \frac{1}{6}$. Also holt der Radfahrer bereits nach 10 Minuten den Fußgänger ein. Sie befinden sich dann in $\begin{pmatrix} 16/6 \\ -2 \end{pmatrix}$, also $\sqrt{(\frac{16}{6})^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3} \approx 3.333$ km vom Nullpunkt entfernt. □

5. Bestimmen Sie die Menge aller Vektoren, die auf den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ normal sind. Welches geometrische Objekt wird dadurch in der Ebene beschrieben?

   Lösung:

   $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + 5y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 5\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ ist eine Gerade durch den Nullpunkt □

6. Bestimmen Sie je eine Gleichungsform der folgenden beiden Geraden:

$$\begin{aligned} g &: X = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ h &: X = \begin{pmatrix} 7 \\ 22 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Wo schneiden sich diese Geraden und welchen Winkel schließen sie ein?

   Lösung:

   $g : 2x + y = 1$, $h : 3x - y = -1$, Schnittpunkt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $\cos\alpha = \frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = \frac{3\pi}{4} = 135°$ □

7. Bestimmen Sie je eine Parameterform der folgenden beiden Geraden:

$$\begin{aligned} g &: 8x - 3y = -1 \\ h &: 2x - 3y = -1 \end{aligned}$$

   Auf welchen der beiden Geraden liegen die Punkte $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$?

   Lösung:

   $g : X = \begin{pmatrix} -1/8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $g : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

$h: X = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $h: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ liegt auf g und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ liegt auf beiden Geraden □

8. Gegeben sei die Gerade $g: 5x - 3y = -1$ und der Punkt $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

   Wie weit ist P von g entfernt?

   Hinweis: Bestimmen Sie dazu eine Gerade h, die normal auf g ist und durch den Punkt P geht. Die Entfernung von P zu g entspricht der Entfernung von P zum Schnittpunkt von g und h.

   Lösung:

   $h: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

   Einsetzen in die Gleichung von g ergibt $\lambda = \frac{1}{2}$. Schnittpunkt: $\begin{pmatrix} 5/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$

   Entfernung von P zu g: $\sqrt{(\frac{5}{2})^2 + (-\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{17}{2}} \approx 2.915476$ □