Algebra (Informatik)
7. Übungsblatt für den 9. Mai 2016

(1) (Lineare Hülle)

(a) Gilt $\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right) \in L(\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-2\\-4\end{smallmatrix}\right))$?

(b) Gilt $\left(\begin{smallmatrix}1\\-5\end{smallmatrix}\right) \in L(\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right))$?

(c) Liegt $\left(\begin{smallmatrix}7\\-2\\-2\end{smallmatrix}\right)$ in der linearen Hülle von $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-2\\0\\4\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)$?

Geben Sie, wenn möglich, auch immer die Koeffizienten einer Linearkombination an, die den gesuchten Vektor ergibt.

(2) Testen Sie jeweils, ob folgende Folgen von Vektoren linear abhängig sind. Finden Sie, falls die Vektoren linear abhängig sind, eine Linearkombination, die den Nullvektor ergibt, und bei der nicht jeder Vektor 0 mal genommen wird.

(a) $\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\-2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\10\\-10\end{smallmatrix}\right)$,

(b) $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right)$,

(c) $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1\\2\\2\end{smallmatrix}\right)$,

(d) $\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\-5\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-2\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}16\\8\\-25\end{smallmatrix}\right)$.

(3) (a) Bestimmen Sie eine Basis für den Unterraum U des $\mathbb{R}^4$, der durch

$$U = \{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$$

gegeben ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis für den Unterraum U des $\mathbb{R}^5$, der durch $U = \{(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \sum_{i=1}^{5} x_i = 0\}$ gegeben ist.

(4) (a) Für welche Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ ist die Folge $(\left(\begin{smallmatrix}-1\\3\end{smallmatrix}\right), v)$ linear abhängig?

(b) Finden Sie einen Vektor $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$, sodass die Folge $(\left(\begin{smallmatrix}1\\-3\\5\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\0\\1\end{smallmatrix}\right), w)$ linear abhängig ist.

(c) Finden Sie einen Vektor $u \in \mathbb{R}^3$, sodass die Folge $(\left(\begin{smallmatrix}1\\-3\\5\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\0\\1\end{smallmatrix}\right), u)$ linear unabhängig ist.

(5) Vervollständigen Sie die Begründung für folgende Aussage.

Seien $v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^n$ so, dass w in der linearen Hülle von v_1 und v_2 liegt. Dann sind (v_1, v_2, w) linear abhängig.

Begründung: Da w in der linearen Hülle von v_1 und v_2 liegt, gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$w = \underline{\hspace{6cm}}.$$

Daher gilt

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \underline{\hspace{2cm}} = 0.$$

Das ist eine Linearkombination, die 0 ergibt, obwohl nicht jeder Vektor __________ mal genommen wurde. Daher sind (v_1, v_2, w) __________.

(6) Finden Sie eine Teilmenge T des $\mathbb{R}^3$, die die Eigenschaft $\forall t \in T\, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha\, t \in T$ erfüllt und die Eigenschaft $\forall s, t \in T : s + t \in T$ nicht erfüllt.