

Algebra für Informatik (2016S)

10. Übungsblatt

für den 6. Juni 2016

1. Berechnen Sie das kleinste gemeinsame Vielfache von

- (a) 62 und 93
- (b) 55 und 89
- (c) 120 und 126

2. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ sodass $a|c$ und $b|d$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$ab \mid \text{kgV}(c, d) \text{ggT}(a, b).$$

3. Sei $(p_1, p_2, p_3, \dots) = (2, 3, 5, \dots)$ die Folge der Primzahlen. Für $a, b \in \mathbb{N}$ seien $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sodass $a = \prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{\alpha_i}$ und $b = \prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{\beta_i}$ die Primzahlzerlegungen von a und b sind. Dann lassen sich ggT und kgV auf folgende Weise ausdrücken:

$$\text{ggT}(a, b) = \prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)} \quad \text{und} \quad \text{kgV}(a, b) = \prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}.$$

Verwenden Sie diese Formeln um die Distributivgesetze für ggT und kgV zu beweisen, siehe Satz 6.13 (3–4) im Skriptum. Zeigen Sie also, dass für $a, b, c \in \mathbb{N}$ folgende Identitäten gelten:

- (a) $\text{ggT}(\text{kgV}(a, b), c) = \text{kgV}(\text{ggT}(a, c), \text{ggT}(b, c))$
- (b) $\text{kgV}(\text{ggT}(a, b), c) = \text{ggT}(\text{kgV}(a, c), \text{kgV}(b, c))$

4. Geben Sie zu jeder der folgenden Kongruenzen eine Teilmenge T von \mathbb{N} an, sodass die Kongruenz *genau dann* lösbar ist, wenn $c \in \mathbb{N}$ von keinem Element von T geteilt wird.

- (a) $42x \equiv 22 \pmod{c}$
- (b) $20x \equiv 29 \pmod{c}$
- (c) $36x \equiv 10 \pmod{c}$

5. Bestimmen Sie das kleinste $x \in \mathbb{N}$ sodass

$$7x \equiv 22 \pmod{100}.$$

6. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $c \neq 0$ sodass die Kongruenz $ax \equiv b \pmod{c}$ in \mathbb{Z} lösbar ist. Zeigen Sie, dass dann genau eine Lösung $x_0 \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq x_0 < \frac{|c|}{\text{ggT}(a, c)}$ existiert.

7. Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$26x + 16y = 42.$$

8. Berechnen Sie die Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ der folgenden Kongruenzen.

- (a) $44x \equiv 74 \pmod{14}$
- (b) $44x \equiv 74 \pmod{15}$
- (c) $44x \equiv 74 \pmod{16}$