Algebra für Informatik (2016S)

8. Übungsblatt, mit Lösungen

für den 23. Mai 2016

1. Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension folgender Unterräume.

   (a) $\{r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} \mid r, s, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

   (b) $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 3y + 2z = 2\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

   (c) $\{\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 5u - 2v = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

   (d) $L(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix})$.

   (e) $L(\begin{pmatrix} 2.5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

   (f) $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

   Lösung:

   (a) $B = (\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix})$.

   (b) Die Menge ist kein Unterraum.

   (c) Normalvektor der Ebene ist $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Ebene wird aufgespannt von $B = (\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

   (d) $B = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix})$ oder $B = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

   (e) $B = (v_1, v_3)$.

   (f) $B = (v_1, v_2)$, bzw. jede Auswahl von 2 aus den 3 Vektoren.

   $\square$

2. Sei U der durch $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^4$.

   (a) Ist $B = (a, b)$ eine Basis von U?

   (b) Erweitern Sie B zu einer Basis C von $\mathbb{R}^4$.

   Lösung:

   (a) Ja, weil linear unabhängig.

   (b) $C = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

   $\square$

3. Seien die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ eine Basis des Unterraums U. Zeigen Sie direkt aus den Definitionen, dass auch $(a - \frac{1}{3}b, b)$ eine Basis von U ist.

   Lösung:
   Wir zeigen zuerst die lineare Unabhängigkeit. Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1(a - \frac{1}{3}b) + \lambda_2 b = 0$. Umformen ergibt dann $\lambda_1 a + (-\frac{\lambda_1}{3} + \lambda_2)b = 0$. Weil a und b laut Voraussetzung linear unabhängig sind, muss gelten:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ -\frac{\lambda_1}{3} + \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

   Also ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

   Weiters ist zu zeigen, dass $L(a - \frac{1}{3}b, b) = U$.
   Sei $v \in L(a - \frac{1}{3}b, b)$. Dann gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1(a - \frac{1}{3}b) + \lambda_2 b \\ &= \lambda_1 a + (-\frac{\lambda_1}{3} + \lambda_2)b \end{aligned}$$

   Also ist $v \in L(a, b) = U$.
   Sei nun umgekehrt $v \in U$. Dann gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 a + \lambda_2 b \\ &= \lambda_1 a - \frac{\lambda_1}{3}b + \frac{\lambda_1}{3}b + \lambda_2 b \\ &= \lambda_1(a - \frac{1}{3}b) + (\frac{\lambda_1}{3} + \lambda_2)b \end{aligned}$$

   Somit ist $v \in L(a - \frac{1}{3}b, b)$ $\square$

4. Bestimmen Sie für jeden der Zeilenräume $Z(A)$, $Z(B)$, $Z(C)$, $Z(D)$ eine Basis. Können Sie entscheiden, welche dieser Zeilenräume gleich sind.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & -11 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Lösung:
A, C, D haben $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ als Zeilenstaffelnormalform,
B hat $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Daher gilt $Z(A) = Z(C) = Z(D) \neq Z(B)$. $\square$

5. Bestimmen Sie eine Basis des Nullraums von

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung:
Sind schon ein Zeilenstaffelnormalform. Basis des Nullraums ist daher direkt ablesbar. $\square$

6. Bestimmen Sie für jede der Matrizen in Aufgabe 4 eine Basis des Nullraums. Welche davon sind gleich?

Lösung:
Dort wurden die Zeilenstaffelnormalformen bestimmt. Die Nullräume sind genau dann gleich, wenn die Zeilenräume gleich sind. $\square$

7. Bestimmen Sie alle Vektoren

(a) im $\mathbb{R}^3$, die auf $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ normal stehen.

Lösung:

$$\begin{matrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 3\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 3\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}2 & 0 & 3\\ 0 & 2 & -3\end{matrix}$$

Lösung: $S\begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix}$ □

(b) im $\mathbb{R}^4$, die auf $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\3\\0\\0\end{pmatrix}$ normal stehen.

Lösung:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & -4 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}4 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 4 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 4 & -3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix}4 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 4 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 4 & -3\end{matrix}$$ und so-

mit $S\begin{pmatrix}6\\-4\\-3\\-4\end{pmatrix}$. □

8. Gegeben seien die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } x_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für eine Teilmenge S eines Vektorraums, bezeichne $S^\perp$ die Menge aller Vektoren des Vektorraums, die auf jeden Vektor von S normal stehen.

Berechnen Sie jeweils eine Basis und die Dimensionen von:

(a) $\{x_1\}^\perp$,

Lösung:

$S \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dim: 2.

□

(b) $\{x_1, x_2\}^\perp$,

Lösung:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix},$$

daher $S \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dim: 1. □

(c) $\{x_1, x_2, x_3\}^\perp$,

Lösung:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix},$$

daher wie zuvor $S \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dim: 1.

Er gilt: $x_3 = 2x_2 - 3x_1$. □

(d) $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}^\perp$.

Lösung:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix},$$

daher nur: $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$, Basis:$\{\} = \varnothing$ dim: 0.

□