Algebra für Informatik (2016S)

13. Übungsblatt

für den 27. Juni 2016

0. Lesen Sie Kapitel 8.3, Polynomfunktionen und Nullstellen, auf Seite 128 des Skriptums.
1. Bestimmen Sie irreduzible Polynome p_1, p_2, $, \ldots, p_k \in \mathbb{R}[x]$, sodass
$$f := 2 - 2x - x^2 + x^3 = \prod_{i=1}^{k} p_i.$$
2. Bestimmen Sie irreduzible Polynome p_1, p_2, $, \ldots, p_k \in \mathbb{Q}[x]$, sodass
$$f := 2 - 2x - x^2 + x^3 = \prod_{i=1}^{k} p_i.$$
3. Bestimmen Sie irreduzible Polynome p_1, p_2, $, \ldots, p_k \in \mathbb{Z}_5[x]$, sodass
$$f := x^3 + 3x + 2 = \prod_{i=1}^{k} p_i$$
4. Wir bezeichnen alle nicht irreduziblen Elemente aus $K[x]$ als *reduzibel*. Beweisen Sie folgenden Satz: Sei K ein Körper und sei $f \in K[x]$ mit Grad 2 oder 3. Das Polynom f ist genau dann reduzibel, wenn f eine Nullstelle $\alpha \in K$ hat.
5. Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass der Satz aus Aufgabe 4. nicht für Polynome mit Grad 4 gültig ist.
6. Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(f, g)$, wobei $f := x^4 - 3x^2 + 6x + 1$ und $g := 2x^3 + 4x^2 - x + 1$, f, $g \in \mathbb{R}[x]$ und bestimmen Sie zwei Elemente p, $q \in \mathbb{R}[x]$, sodass
$$f \cdot p + g \cdot q = \mathrm{ggT}(f, g).$$
7. Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(f, g)$, wobei $f := x^4 - 3x^2 + 6x + 1$ und $g := 2x^3 + 4x^2 - x + 1$, f, $g \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ und bestimmen Sie zwei Elemente p, $q \in \mathbb{Z}_{11}[x]$, sodass
$$f \cdot p + g \cdot q = \mathrm{ggT}(f, g).$$
8. Wie viele Nullstellen hat $x^2 + x \in \mathbb{Z}_6[x]$ in $\mathbb{Z}_6$?