Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
Algebra und Diskrete Mathematik
1.Übungsblatt für den 10. März 2016

(1) (cf. [2, p. 28]) Sei p_n die n-te Primzahl, d. h. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, usw. Zeigen Sie

$$p_n \leq 2^{(2^{n-1})}. \tag{1}$$

Sei nun $\pi(n) := \#\{p \in \mathbb{N} : p \leq n \text{ und } p \text{ prim}\}$. Verwenden Sie (1), um zu zeigen, dass für alle $n \geq 2$ gilt:

$$\pi(n) \geq \log_2(\log_2(n)).$$

Hinweis: Euklids Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt ([1, Buch IX, Satz 20], 270 v.Chr.) beruht auf folgender Überlegung: Seien $q_1, q_2, \ldots, q_n$ Primzahlen. Dann ist der kleinste positive Teiler von $q_1 q_2 \cdots q_n + 1$ eine Primzahl, die von allen q_i verschieden ist.

(2) Sei p_n die n-te Primzahl, d. h. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, usw. Zeigen Sie, auch, ohne die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung zu verwenden, dass folgendes gilt: wenn

$$\begin{aligned} a &= \prod p_i{}^{\alpha_i} \\ b &= \prod p_i{}^{\beta_i}, \end{aligned}$$

wobei $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0$, und fast alle $\alpha_i, \beta_i = 0$ sind, dann gilt $a \mid b$ genau dann, wenn für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\alpha_i \leq \beta_i$ ist. (Zeigen Sie, dass diese Aussage für alle Primfaktorzerlegungen von a und b gilt. Folgt daraus die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung?)

(3) Bestimmen Sie jeweils den ggT von a und b, und bestimmen Sie auch Zahlen u und v, sodass $ua + vb = \mathrm{ggT}(a, b)$.
   (a) $a = 2^{20} - 1$, $b = 2^{18} - 1$.
   (b) $a = 144$, $b = 89$.
   (c) $a = 16$, $b = 1035$.

(4) (a) Zeigen Sie: Für alle ganzen Zahlen a, b, c gilt: wenn $a \mid b$ und $a \mid c$, so gilt auch $a \mid (b + c)$.
   (b) Zeigen Sie: Für alle ganzen Zahlen a, b, c gilt: wenn $a \mid b$, so gilt auch $a \mid bc$ und $ac \mid bc$.
   (c) Gilt für alle ganzen Zahlen a, b, c folgendes: wenn $ac \mid bc$, so gilt $a \mid b$? Unter welcher Einschränkung an c gilt diese Aussage? Formulieren Sie den Satz in der Form

   Für alle ganzen Zahlen a, b, c mit …gilt: wenn $ac \mid bc$, so gilt $a \mid b$.

(5) (a) Zeigen Sie, ohne die Primfaktorzerlegung zu verwenden, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt: wenn $a \mid bc$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, so gilt $a \mid c$.
   (b) Zeigen Sie, ohne die Primfaktorzerlegung zu verwenden, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt: wenn $a \mid c$, $b \mid c$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, so gilt $ab \mid c$.

Literatur

[1] Euklid. *Die Elemente.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1991. Buch I–XIII. [Book I–XIII], Based on Heiberg's text, Translated from the Greek and edited by Clemens Thaer.

[2] R. Remmert and P. Ullrich. *Elementare Zahlentheorie.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1987.