Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
Algebra und Diskrete Mathematik
3. Übungsblatt für den 07.04.16

1. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Dann nennt man die Menge
$$\mathscr{N}(R) \;=\; \{r \in R \,:\, \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } r^n = 0\}$$
das Nilradikal zu R. Zeigen Sie, dass $\mathscr{N}(R)$ ein Ideal ist.

2. Beispiel 2.11, Nr. 3 und Nr. 5 im Skriptum.

3. Sei $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ die Teilmenge der komplexen Zahlen, die durch
$$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \;=\; \{a + b\sqrt{-3} \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$$
definiert ist. Wir definieren $N(a + b\sqrt{-3}) = a^2 + 3\,b^2$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

   a. $N(x) \in \mathbb{N}$ für alle $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$;
   b. $N(x) = 0$ gilt genau dann $x = 0$;
   c. $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$;
   d. x ist invertierbar genau dann $N(x) = 1$.

   Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ kein faktorieller Integritätsbereich ist. (Hinweis: $4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$)

4. Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und für alle primen Elemente $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n \in R$ mit
$$f_1 \cdots f_m \;=\; g_1 \cdots g_n$$
gilt $m = n$, und es gibt eine bijektive Abbildung $\pi \colon \{1, \ldots, m\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ sodass für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt $f_i \sim_R g_{\pi(i)}$.

5. a. Sei $I \subseteq \mathbb{Z}$ das Ideal $I = (12, 15)$. Bestimmen Sie eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$, sodass $I = (a)$.
   b. Sei $I \subseteq \mathbb{Q}[t]$ das Ideal $I = (t^2 + 2t + 1, t^2 - 1)$. Bestimmen Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[t]$, sodass $I = (f)$.