Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
Algebra und Diskrete Mathematik
4.Übungsblatt für den 14. April 2016

(1) Sei R ein Euklidischer Integritätsbereich, und seien $a, b \in R$. Zeigen Sie, dass es ein $d \in R$ gibt, sodass
   (a) $d \mid a$, $d \mid b$, und
   (b) $\forall t \in R : (t \mid a \wedge t \mid b) \Rightarrow t \mid d$.

   So ein d bezeichnen wir als einen *größten gemeinsamen Teiler* von a und b. *Hinweis:* Betrachten Sie ein erzeugendes Element des von a und b erzeugten Ideals.

(2) Berechnen Sie einen solchen ggT in $\mathbb{Z}[i]$ von $0 + 13\,i$ und $95 - 6\,i$. *Hinweis:* Euklidischer Algorithmus.

(3) In welchen der folgenden Ringe ist das Polynom $p = 5t^2 + 10t + 10$ ein irreduzibles Element? $\mathbb{R}[t], \mathbb{Q}[t], \mathbb{Z}[t], \mathbb{C}[t]$.

(4) (a) Bestimmen Sie alle primen Elemente von $\mathbb{Z}[i]$.
   (b) Sei $p \in \mathbb{P}$ mit $p \equiv 1 \pmod 4$. Ist die Darstellung $p = a^2 + b^2$ mit $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, eindeutig? *Hinweis:* $p = (a + b\,i)(a - b\,i)$ ist eine Zerlegung.

(5) Seien $p \in \mathbb{P}$, $i \in \{1, \ldots, p-1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie $p \mid \binom{p}{i}$, und verwenden Sie dieses Ergebnis, um mit Induktion nach n zu beweisen, dass $n^p \equiv n \pmod p$ gilt.