Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
Algebra und Diskrete Mathematik
7.Übungsblatt für den 12. Mai 2016

(1) Sei $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ eine Gruppe, und sei H eine endliche nichtleere Teilmenge von G, sodass für alle $h_1, h_2 \in H$ auch $h_1 \cdot h_2$ in H liegt. Muss H dann Trägermenge einer Untergruppe von $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ sein?

(2) Wir haben einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbf{G}$ nach $\mathbf{H}$ als eine Abbildung $\varphi : G \to H$ definiert, die folgende drei Bedingungen erfüllt:
(a) $\varphi(g_1 \cdot_{\mathbf{G}} g_2) = \varphi(g_1) \cdot_{\mathbf{H}} \varphi(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G$;
(b) $\varphi({g_1}^{-1_{\mathbf{G}}}) = (\varphi(g_1))^{-1_{\mathbf{H}}}$ für alle $g_1 \in G$;
(c) $\varphi(1_{\mathbf{G}}) = 1_{\mathbf{H}}$.

Seien $\mathbf{G}$ und $\mathbf{H}$ Gruppen, und sei ψ eine Abbildung, die die erste Bedingung

$$\psi(g_1 \cdot_{\mathbf{G}} g_2) = \psi(g_1) \cdot_{\mathbf{H}} \psi(g_2) \text{ für alle } g_1, g_2 \in G$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass ψ dann ein Gruppenhomomorphismus ist, das heißt, zeigen Sie, dass ψ auch die anderen beiden Bedinungen erfüllt. *Hinweis:* Starten Sie mit der dritten Bedingung!

(3) Die Ordnung eines Gruppenelements g ist das kleinste $n \in \mathbb{N}$, sodass $g^n = 1$. Seien $\mathbf{G}$ und $\mathbf{H}$ endliche Gruppen, und sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ die Ordnung von g ein Vielfaches der Ordnung von $\varphi(g)$ ist.

(4) Sei $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ eine ganzzahlige 2×2-Matrix mit ungerader Determinante. Zeigen Sie, dass in der Matrix $B := A^6$ die Diagonalelemente $B(1,1)$ und $B(2,2)$ ungerade und die anderen beiden Elemente $B(1,2)$ und $B(2,1)$ gerade sind. *Hinweis:* Denken Sie an die Gruppe der invertierbaren Matrizen über $\mathbb{Z}_2$.

(5) Seien G und H Gruppen, und sei h ein Homomorphismus von G nach H. Sei B Trägermenge einer Untergruppe von H. Zeigen Sie, dass $h^{-1}(B) = \{x \in G \mid h(x) \in B\}$ Trägermenge einer Untergruppe von G ist.

Hinweis: Am 6. Mai entfällt die Vorlesung.