Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
10. Übungsblatt für den 9. Juni 2016

(1) Weisen Sie jeweils nach, dass N ein Normalteiler der Gruppe G ist, indem Sie einen Homomorphismus φ von G in eine Gruppe angeben, dessen Kern N ist. Bestimmen Sie auch das Image von φ und damit eine Gruppe, zu der G/N isomorph ist.
  (a) $G := \mathrm{GL}(n,p) = \{A \in {\mathbb{Z}_p}^{n\times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}$; $N := \mathrm{SL}(n,p) = \{A \in {\mathbb{Z}_p}^{n\times n} \mid \det(A) = 1\}$.
  (b) $G = S_n$; $N = A_n = \{\pi \mid \pi \in S_n, \pi \text{ ist gerade Permutation}\}$.
  (c) $G := (\mathbb{Z}, +)$; $N := \{5 \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

(2) Zeigen Sie $r(2,3,3) \leq 17$. (Hinweis: Betrachten Sie den Beweis von $r(2,2,3) \leq 6$, und verwenden Sie die gleiche Beweisidee nocheinmal.)

(3) Zeigen Sie $r(p, t+1, n) \leq r(p, t, r(p, 2, n))$. *Hinweis:* Gehen Sie von einer Färbung mit $t+1$ Farben aus. Betrachten Sie dann eine neue Färbung, bei der Sie die Farben t und $t+1$ nicht mehr auseinanderhalten können.

(4) Zeigen Sie den folgenden Satz von Schur (1916):

> Für jede Zahl $t \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zahl $N \in \mathbb{N}$, sodass es für jede Partition von $\{1, 2, \ldots, N\}$ in t Klassen eine Klasse gibt, die zwei Elemente x, y ($x \neq y$) und deren Summe $x + y$ enthält.

(5) (Induktionsbeweis im Satz von Ramsey) Seien $R, M : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Die Funktionen R, M erfüllen:
  (a) $R(0, n) \in \mathbb{N}_0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
  (b) $M(0, n) \in \mathbb{N}_0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
  (c) $R(n, 0) \in \mathbb{N}_0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
  (d) $M(n, 0) \in \mathbb{N}_0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
  (e) $R(p, n) \leq M(p, 2n)$ für alle $p, n \in \mathbb{N}_0$.
  (f) Für alle $p, n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ mit $M(p, n-1) \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$$M(p, n) \leq 1 + R(p-1, M(p, n-1)).$$

Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{N}_0$ gilt: $R(a, b) \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie also, dass R nie den Funktionswert ∞ annimmt.