Algebra für Informatiker, 3. Übungsblatt

1. Untersuchen Sie, ob eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe bzw. eine abelsche Gruppe vorliegt:

   (a) $(\mathbb{Z}, -)$;

   (b) Vektoren in der Ebene mit der Addition;

   (c) die Menge der nichtkonstanten linearen Abbildungen auf der Geraden mit Komposition, z.B. $(2x+1) \circ (0.5x+2) = 2(0.5x+2)+1 = x+5$;

   (d) $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$, mit $x * y := x + y + xy$.

2. Sei $M := \{1, 2, 3\}$. Für jedes Element in der symmetrische Gruppe $S(M)$ auf M finden Sie sein Inverses.

3. Für $M := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ betrachten wir die symmetrische Gruppe $S(M)$. Seien $\alpha, \beta \in S(M)$, sodass

$$\alpha(i) := \begin{cases} i+1, \text{wenn } 0 \leqslant i \leqslant 4, \\ 0, \text{wenn } i = 5. \end{cases} \qquad \text{und } \beta(i) := \begin{cases} 1, \text{wenn } i = 0, \\ 0, \text{wenn } i = 1, \\ i, \text{anders.} \end{cases}$$

   Berechnen Sie $\alpha \circ \beta$ und $\beta \circ \alpha$.

4. (schriftliche Abgabe) Für α und β aus dem vorherigen Beispiel, finden Sie die minimale Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass α^n das neutrale Element von $S(M)$ ist.

5. (schriftliche Abgabe) Für $M := \{0, 1, 2, 3\}$ betrachten wir das Monoid $F := (M^M, \circ)$.

   (a) Wie viele Elemente gibt es in F?

   (b) Wie viele invertierbare Elemente gibt es in F?

6. Sei $M := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Beweisen Sie, dass $(M, \oplus)$ mit $a \oplus b = \mathrm{mod}(a+b, 7)$ eine abelsche Gruppe ist.

7. Sei $M := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Beweisen Sie, dass $(M, \otimes)$ mit $a \otimes b = \mathrm{mod}(a \cdot b, 7)$ eine Halbgruppe ist. Finden Sie für jedes Element in M ein Inverses, sofern es existiert.

8. Gibt es eine nichtabelsche Gruppe mit drei Elementen?