Algebra für Informatiker, 5.Übungsblatt

1. (schriftliche Abgabe) Sei M eine nichtleere Menge, $(R, +, \cdot)$ ein Ring und R^M die Menge aller Funktionen von M nach R. Wir definieren die Summe $\oplus$ und das Produkt $\odot$ zweier Funktionen $f, g \in R^M$ durch: Für alle $m \in M, (f \oplus g)(m) := f(m) + g(m)$ und $(f \odot g)(m) := f(m) \cdot g(m)$. Zeigen Sie:

   a. $\left(R^M, \oplus, \odot\right)$ ist ein Ring.

   b. Falls R ein Einselement hat, oder kommutativ ist, dann gilt dasselbe auch für den Ring R^M.

2. Bestimmen Sie die Verknüpfungstabelle des direkten Produkts der Ringe $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$.

3. Ist das direkte Produkt von Körpern wieder ein Körper?

4. Bestimmen Sie alle Unterringe von $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$.

5. Zeigen Sie, dass $U = \{2, 4, 0\}$ ein Unterring mit Einselement von $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ ist, aber dieses Einselement verschieden vom Einselement des Rings $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ ist.

6. Sei K ein Körper und U ein Unterkörper von K. Zeigen Sie, dass U und K dasselbe Einselement haben.

7. Finden Sie einen unendlichen Unterring von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, der 12 nicht enthält.

8. (schriftliche Abgabe) Zeigen Sie, dass $K = \left\{a + b\sqrt{2}\,|a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, der den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen enthält. Gilt $K = \mathbb{R}$?