Algebra für Informatiker, 6. Übungsblatt

1. Sei R ein Ring und seien S und T Unterringe von R: Zeigen Sie, dass $S \cap T = \{x \in R \mid x \in S \text{ und } x \in T\}$ ein Unterring von R ist. (Hinweis: Verwenden Sie das Unterringkriterium.) Ist auch $S \cup T$ stets wieder ein Unterring?

2. Berechnen Sie ohne Zuhilfenahme technischer Hilfsmittel die letzte Dezimalstelle von $1234567^{1234567}$.

3. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler g der Zahlen $a = 24$ und $b = 63$, sowie die Bézout-Koeffizienten s und t, so dass $as + bt = g$ gilt. Bestimmen Sie weiters in $\mathbb{Z}_{21}$ das inverse Element von 13.

4. Einheitengruppe: Geben Sie alle invertierbaren Elemente von $\mathbb{Z}_{24}$ an. Bestimmen Sie auch jeweils deren Inverse.

5. (schriftliche Abgabe) Es bezeichne F_n die n-te Fibonacci-Zahl, die rekursiv definiert ist durch $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ mit den Anfangswerten $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$. Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt: Der erweiterte Euklidische Algorithmus benötigt zur Berechnung von $\mathrm{ggT}(F_{n+1}, F_n)$ genau $n - 1$ Iterationsschritte, und liefert
$$s \cdot F_{n+1} + t \cdot F_n = 1 \quad \text{mit} \quad s = (-1)^{n-1} F_{n-2} \text{ und } t = (-1)^n F_{n-1}.$$

6. (schriftliche Abgabe) Bestimmen Sie jeweils alle ganzzahligen Lösungen der folgenden Gleichungen:
   a) $26x + 16y = 1$
   b) $26x + 16y = 2$
   c) $26x + 16y = 42$

7. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und (x, y) eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $ax + by = c$. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{ggT}(a, b) \mid c$ gilt.

8. Es sei $L \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die Menge aller ganzzahligen Lösungen der Gleichung $7x + 5y = 0$. Ist L eine Unterhalbgruppe, ein Untermonoid oder eine Untergruppe von $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ bzw. $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \cdot)$? Die Verknüpfungen sind dabei komponentenweise definiert, so wie in Aufgabe 3 vom 4. Übungsblatt.