Algebra für Informatiker, 8. Übungsblatt

1. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von $\mathbb{R}_2$ über $\mathbb{R}$?

   (a) $\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}_2 \mid 2x - y = 0\}$

   (b) $\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}_2 \mid 2x - y = 1\}$

   (c) $\{\binom{1}{1} + \lambda \binom{2}{1} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

   (d) $\{\lambda \binom{1}{1} \mid \lambda \in \mathbb{Z}\}$

2. Sei $V = C(\mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von V?

   (a) $\{f \in V \mid f(0) = 0 \text{ und } f(1) = 0\}$

   (b) $\{f \in V \mid f(0) = 0 \text{ und } f(1) = 1\}$

3. (schriftliche Abgabe) Bestimmen Sie eine Basis der folgenden Vektorräume über $\mathbb{R}$.

   (a) $L(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\})$

   (b) $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x + 3y + z = 0\}$

   (c) $L(\{\binom{2}{4}\})$

   (d) $L(\{\binom{1}{3}, \binom{2}{6}, \binom{-2}{6}\})$

4. Berechnen Sie eine Basis des Unterraums $U \cap W \subseteq \mathbb{R}_3$ mit $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x + 2y - z = 0\}$ und $W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x + 2y + z = 0\}$.

5. Finden Sie eine Basis $B = \{b_1, b_2\}$ von $L(\{\binom{0}{1}, \binom{1}{-1}\})$, die keinen Vektor aus $L(\{\binom{0}{1}\}) \cup L(\{\binom{1}{-1}\})$ enthält und sodass das Skalarprodukt $b_1 \cdot b_2 = 0$ ist.

6. Seien $U, W \subseteq V$ Unterräume eines Vektorraums V. Zeigen Sie, dass $U \cap W$ ein Unterraum von V ist. (Verwenden Sie dabei das Unterraumkriterium).

7. Seien $U, W \subseteq V$ Unterräume eines Vektorraums V. Zeigen Sie, dass die Summe
$$U + W = \{u + w \mid u \in U \text{ und } w \in W\}$$
   von U und W ein Unterraum von V ist. (Verwenden Sie dabei das Unterraumkriterium).

8. (schriftliche Abgabe) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und bezeichne $\mathbf{0} \in V$ den Nullvektor. Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in K$ und $v, w \in V$ gilt:

   (a) $\lambda v = \mathbf{0} \iff \lambda = 0 \text{ oder } v = \mathbf{0}$,

   (b) $\lambda(v - w) = \lambda v - \lambda w$.