Algebra für Informatiker, 12. Übungsblatt

1. (schriftliche Abgabe) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4^5.$$

   Berechnen Sie den Rang RgA, eine Basis des Zeilenraumes $L(Z_1, \ldots, Z_4)$ der Zeilen $Z_1, \ldots, Z_4$ und eine Basis des Spaltenraumes $L(S_1, \ldots, S_5)$ der Spalten $S_1, \ldots, S_5$ von A.

2. Finden Sie jeweils Bedingungen an $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^3$$

   Rang $RgA = 1$, $RgA = 2$ bzw. $RgA = 3$ hat.

3. Finden Sie zwei invertierbare Matrizen A und B, sodass

$$(A \cdot B)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}.$$

   Hinweis: Finden Sie dazu invertierbare Matrizen A und B mit $A \cdot B \neq B \cdot A$.

4. (schriftliche Abgabe) Berechnen Sie die Determinante $|A|$ von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 9 & 17 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4^4.$$

5. Sei $K = \mathbb{Z}_7$. Berechnen Sie die Determinante $|A| \in K$ von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in K_3^3.$$

6. Berechnen Sie den $r = RgA$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^4$$

   und reguläre (invertierbare) Matrizen $B \in \mathbb{R}_3^3$ und $C \in \mathbb{R}_4^4$, sodass $B \cdot A \cdot C = E^{(r)}$.

7. Seien

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

   Rechnen Sie nach, dass für die Determinanten $|A \cdot B| = |A||B|$ gilt.

8. Sei $V = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner 4.

   Zeigen Sie, dass die Auswertung $E\colon V \to \mathbb{R}$ mit $E(p(x)) = p(1)$ bei 1 eine lineare Abbildung ist.