

Mathematische Modelle

(Dieses Skriptum wurde unter Mitwirkung von
Robert Feichtinger, Jörg Forstner, Katrin Rath und Stefanie Schütt
nach der Vorlesung von J.B. Cooper verfaßt.)

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Überblick	1
2	Die schwingende Saite und das Dirichletproblem	3
2.1	Fourierreihen	3
2.2	Die schwingende Saite	5
2.2.1	Der eindimensionale Fall	5
2.2.2	Der zweidimensionale Fall	11
2.3	Das Dirichletproblem	12
3	Distributionen	16
3.1	Axiome von Peano	16
3.2	Axiomatik der Distributionen	17
3.3	Periodische Distributionen und Fourierreihen	18
3.4	Axiomatik der Distributionen auf S^1	20
3.5	Distributionen auf S^2 und sphärische Funktionen	21
3.6	Anwendung der distributionellen Fourierreihen – das Isoperimetrische Problem	22
4	Mannigfaltigkeiten	24
4.1	Graphische Darstellung von Mannigfaltigkeiten	24
4.1.1	Mannigfaltigkeiten als Quotientenräume	24
4.1.2	Beispiele von Transformationsgruppen:	26
4.2	Das Spektrum von \mathbf{T}^2, \mathbf{K}	26
5	Spektraltheorie	30
5.1	Unendlich-dimensionaler Spektralsatz	30
6	Die Samuelsonsche Konfiguration	32
6.1	Existenz einer Potentialfunktion:	34
6.2	Existenz und Eindeutigkeit von S -Transversalen	43

Kapitel 1

Einführung

1.1 Überblick

In der Vorlesung Mathematische Modelle in den Naturwissenschaften betrachten wir klassische Probleme, (i.a. aus der Physik) und Methoden zur Bestimmung ihrer Lösungen. Es wird hier nicht so sehr auf einen strengen Aufbau einer Theorie geachtet, sondern meist “drauflos gerechnet” unter Verwendung von Theorien aus anderen Vorlesungen, bzw. um die Entwicklung solcher Theorien zu motivieren.

Zu Beginn erläutern wir das Problem der schwingenden Saite. Das im Prinzip einfache Problem zeigt uns schon, wie wir Aufgabenstellungen ähnlicher Bauart (Schrödingergleichung, Wärmeleitungsgleichung, Potentialgleichungen) meistern sollen: Bei der Lösung der zu behandelnden Differentialgleichung suchen wir Eigenfunktionen und Eigenwerte des auftretenden Laplace-Operators auf einer Mannigfaltigkeit (siehe Kap. 3). D.h., wir lösen das Eigenwertproblem

$$Ax = \lambda x \quad (1.1)$$

wobei A ein Operator, x ein Eigenvektor, λ ein Eigenwert zu x ist (vgl. Vorlesung Lineare Algebra II).

In unserem Fall ist A der Laplace-Operator. Als Beispiel sehen wir uns den eindimensionalen Laplace-Operator $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ an.

Seine Eigenfunktionen sind

$$\cos(nx) \quad \text{bzw.} \quad \sin(nx) \quad (1.2)$$

mit Eigenwerten n^2 , denn

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} \cos(nx) \\ \sin(nx) \end{pmatrix} = n^2 \begin{pmatrix} \cos(nx) \\ \sin(nx) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Unsere Problemstellungen (Schwingende Saite, Wärmeleitung,...) führen zu partiellen Differentialgleichungen, die wir durch Trennung der Variablen

in gewöhnliche Differentialgleichungen überführen können (Sturm-Liouville-Differentialgleichungen). Letztere lösen wir mit Hilfe von Fourierreihen (allgemeiner Entwicklungen nach Eigenfunktionen).

(Analysis I–III, Lineare Algebra, Höhere Differentialgeometrie, Funktionalanalysis, Theorie der Distributionen, Spektraltheorie, Fourierreihen und Integrale, Sobolevräume, Variationsrechnung, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Integralgleichungen.)

An dieser Stelle greift dann die Spektraltheorie, die uns Eigenfunktionen und Eigenwerte für das Eigenwertproblem garantiert.

Allerdings muss man beim Modellieren noch einen Punkt bedenken: Wenn wir uns z.B. die schwingende Saite vorstellen, die an beiden Enden befestigt ist und zu Beginn einen “Knick” hat, also an einer Stelle nicht differenzierbar ist, dann stellt sich die berechtigte Frage: “Wieso betrachte ich eine Differentialgleichung, wieso gibt es Lösungen, wenn die Funktion nicht einmal differenzierbar ist an einer (oder sogar mehreren) Stelle(n)?” Die Antwort liefert die Theorie der Distributionen, die uns erlaubt, stetige, aber nicht notwendigerweise differenzierbare Funktionen als Lösung von Differentialgleichungen zu betrachten.

Daher ergänzen wir die Vorlesung mit einer elementaren axiomatischen Darstellung der Theorie der Distributionen.

Im letzten Teil der Vorlesung betrachten wir sogenannte “Samuelsonkonfigurationen”. Das ist ein Thema der elementaren Differentialgeometrie, aber mit Anwendungen in Kartographie, Thermodynamik usw.

Kapitel 2

Die schwingende Saite und das Dirichletproblem

2.1 Fourierreihen

Gegeben sei eine Funktion $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$, etwa stückweise stetig mit Periode 2π , d.h.

$$\forall x \in \mathbf{R} : f(x + 2\pi) = f(x). \quad (2.1)$$

f darf eine Sprungstelle aufweisen, jedoch soll linksseitige bzw. rechtsseitige Limes an dieser Stelle existieren, also

$$\forall x_0 \in \mathbf{R} \quad \exists y_0^+, y_0^- \in \mathbf{R} : \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_0^+, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y_0^-. \quad (2.2)$$

Gesucht ist eine Darstellung von f als Summe einer Reihe von trigonometrischen Polynomen:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad (2.3)$$

Dies ist die **Fourier-Reihe** von f . Die Koeffizienten a_n und b_n nennt man **Fourier-Koeffizienten**. Aus den Orthogonalitätseigenschaften der trigonometrischen Funktionen folgt, dass die Koeffizienten a_n bzw. b_n wie folgt gegeben werden:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ist f gerade, dann ist $b_n = 0$. Ist f ungerade, so ist $a_n = 0$.

Beispiel: Berechne die Fourier-Reihe von $f(x) = x$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$.

x ist eine ungerade Funktion, daher brauchen wir nur die Fourier-Koeffizienten b_n ausrechnen. Also:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= -\frac{2}{n} \cos(n\pi) \\ &= \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

und somit erhalten wir für die Fourier-Reihe von $f(x) = x$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(nx) \quad (2.5)$$

BEMERKUNG: Ist das betrachtete Intervall nicht $[-\pi, \pi]$ sondern $[-h, h]$, so lautet die Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{nx\pi}{h}\right) + b_n \sin\left(\frac{nx\pi}{h}\right)$$

Die Koeffizienten a_n bzw. b_n sind gegeben durch

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{h}\right) dx \\ b_n &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h f(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{h}\right) dx \end{aligned}$$

BEMERKUNG: Die Fourier-Reihe konvergiert punktweise gegen $f(x_0)$, falls f in x_0 stetig oder gegen $\frac{1}{2}(y_0^+ + y_0^-)$, wenn y_0 eine Sprungstelle ist. (f stückweise stetig-differenzierbar — siehe Skriptum Analysis I von Cooper.)

Fourier-Cosinus- und Sinusreihen

Sei $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ geeignet. Dann nennt man

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

mit

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

die **Fourier-Cosinusreihe** bzw.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

mit

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$$

die **Fourier-Sinusreihe** von f auf $[0, \pi]$. Man bekommt diese Reihen, indem man die natürlichen geraden bzw. ungeraden Erweiterungen von f betrachtet.

Die komplexe Version der Fourier-Reihe

Im reellen Fall verwenden wir die Basis $\{\cos(nx), \sin(nx), 1\}$ für die Fourier-Reihe von f . Im komplexen benutzen wir als Basis die Folge $(e^{inx})_{n=-\infty}^\infty$ mit dem Skalarprodukt

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} f \bar{g} dx \quad (2.6)$$

Man rechnet leicht nach, dass (e^{inx}) orthogonal ist, denn

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2\pi & n = m \end{cases} \quad (2.7)$$

Daher hat die **komplexe Fourier-Reihe** die Gestalt

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

wobei

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Ist speziell f reell, dann gilt $c_{-n} = \bar{c}_n$, wie man aus der Darstellung der c_n sieht.

2.2 Die schwingende Saite

2.2.1 Der eindimensionale Fall

Der zeitunabhängige Fall

Wir betrachten zunächst das statische Problem einer elastischen Saite, die an den Endpunkten 0 und L eingespannt ist. Gegeben sei eine Funktion $f : [0, L] \rightarrow \mathbf{R}$, die eine Kraft auf die Saite beschreibt. Wir suchen die Funktion $u : [0, L] \rightarrow \mathbf{R}$, die das Profil der Saite darstellt.

Die Energie der Saite setzt sich aus Spannungsenergie und potentieller Energie

zusammen (siehe Theoretische Physik I):

$$\begin{aligned}
 E_{pot} &= \int_0^L f(x)u(x) dx \\
 E_{spa} &= \mu \int_0^L \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2} - 1 \right\} dx.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Also erhalten wir für die Gesamtenergie

$$J(u) = E_{pot} + E_{spa} = \int_0^L f(x)u(x) dx + \mu \int_0^L \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2} - 1 \right\} dx \tag{2.9}$$

Es ist ein physikalisches Prinzip, dass wir ein Minimum des **nichtlinearen Funktionals** $J(u)$ suchen müssen.

Für kleine Auslenkungen der Saite können wir den Wurzelausdruck $\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2}$ durch seine Taylor-Reihe approximieren

$$\sqrt{1 + z} \approx 1 + \frac{z}{2} + o(z^2)$$

und erhalten also in unserem Fall für $z = \left(\frac{du}{dx}\right)^2$:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2} \approx 1 + \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^2}{2}$$

Eingesetzt in $J(u)$ ergibt sich

$$J(u) = \frac{\mu}{2} \int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \int_0^L f(x)u(x) dx \tag{2.10}$$

Um davon das Minimum zu bestimmen, verwenden wir die Methode der **Variationsrechnung**. Wir fügen zu u einen Störungsterm ϵv dazu und betrachten die Funktion $\epsilon \mapsto J(u + \epsilon v)$, wobei v eine Testfunktion ist, d.h. v ist glatt, $v(0) = v(L) = 0$. Es gilt:

$$J(u) = \min \Rightarrow \frac{d}{d\epsilon} J(u + \epsilon v) = 0. \tag{2.11}$$

Berechnen von $\frac{d}{d\epsilon} J(u + \epsilon v)$ liefert

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\epsilon} (J(u + \epsilon v) - J(u)) &= \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\mu}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{du}{dx} + \epsilon \frac{dv}{dx}\right)^2 - \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \right] dx + \int_0^L f(x)\epsilon v(x) dx \right] \\
 &= \mu \int_0^L \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \frac{\epsilon}{2} \int_0^L \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx + \int_0^L f(x)v(x) dx
 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} J(u + \epsilon v) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (J(u + \epsilon v) - J(u)) \\ &= \mu \int_0^L \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_0^L f(x)v(x) dx \end{aligned}$$

Daher sieht man: Falls u eine Lösung des Problems $J(u) \rightarrow \min$ ist, dann gilt:

$$\mu \int_0^L \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_0^L f(x)v(x) dx = 0 \quad (2.12)$$

für jede Testfunktion v . Daher folgt durch partielle Integration des ersten Integrals

$$\mu v(x) \frac{du}{dx} \Big|_0^L - \int_0^L \left[\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(x) \right] v(x) dx = 0 \quad (2.13)$$

Aus (2.10) ergibt sich dann (das Lemma von Du Bois Raymond), dass u eine Lösung der Differentialgleichung $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(x) = 0$ ist, falls u eine Lösung des Problems $J(u) \mapsto \min$ ist.

Zusammenfassend haben wir Folgendes zu tun: wir lösen die partielle Differentialgleichung $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x)$ ($\mu \Delta u = f(x)$) und bestimme dann u durch die gegebenen Randbedingungen. Eine wichtige Rolle dabei spielt das entsprechende Eigenwertproblem $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda u(x)$ ($\mu \Delta u = \lambda u(x)$) mit den bekannten Lösungen

$$\begin{aligned} u(x) &= A \cos \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} x \right) + B \sin \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} x \right) \quad (\lambda < 0) \\ u(x) &= A \cosh \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} x \right) + B \sinh \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} x \right) \quad (\lambda > 0) \end{aligned}$$

In unserem Fall sind nur die Lösungen $\mu(x) = \sin n\pi x$ relevant, wegen der Randbedingungen. (Wir setzen jetzt $\mu = 1$, $L = 1$.) Wir bekommen, mit Hilfe des Superpositionsprinzips, die Lösung

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x, \text{ wobei } b_n = \frac{1}{n^2} \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx.$$

Wir werden unten sehen, wie man solche Ausdrücke verwenden kann, um Lösungen der entsprechenden Probleme mit Anfangswerten bzw. Randbedingungen zu bekommen.

Der zeitabhängige Fall

Im vorigen Abschnitt haben wir zeitunabhängige Lösungen u gesucht. Jetzt betrachte wir die Bewegung einer schwingenden Saite. Gegeben sei eine zeitabhängige Kraft $f(t, x)$. Gesucht ist eine Funktion $u : \mathbf{R}_+ \times [0, L] \rightarrow \mathbf{R}$, die die Bewegung der Saite beschreibt.

Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$E_{kin} = \int_0^L \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.14)$$

Das Hamiltonsche Prinzip (siehe Theoretische Physik I) besagt nun, dass für jedes Zeitintervall $[t_1, t_2]$ die Gesamtenergie

$$J(u) = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - f(t, x) \right] dx dt \quad (2.15)$$

ein Minimum ist.

Analog zu vorhin bestimmen wir wiederum mittels Variationsrechnung das Minimum dieses Funktional, indem wir $\frac{d}{d\epsilon} J(u + \epsilon v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (J(u + \epsilon v) - J(u)) = 0$ berechnen. Wir bekommen die Gleichung

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x) \right] v(t, x) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} v(t, x) \Big|_0^L \right] dt = 0 \quad (2.16)$$

Da wir Testfunktionen v mit $v(t, L) = v(t, 0) = 0$ betrachten, fällt das letzte Integral weg und wir erhalten die sogenannte **allgemeine Wellengleichung**:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x) = 0. \quad (2.17)$$

Wir können wie im Abschnitt zuvor **Randbedingungen** aufstellen:

- $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ mit Anfangsbedingungen $u(0, x) = u_0(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x)$;
- $\frac{du}{dx}(t, 0) = \frac{du}{dx}(t, L) = 0$ mit Anfangsbedingungen wie oben.

Die Lösungsstrategie ist nunmehr die obigen speziellen Lösungen der Wellengleichung zu benutzen, um u zu bestimmen.

Wie löst man die Wellengleichung?

Die Frage ist nun, wie man $\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ löst (Wir nehmen an, dass ρ und μ von x unabhängig sind und $f = 0$). Dazu wenden wir die **Methode der Trennung der Variablen** an.

Unser Ansatz lautet $u(x, t) = X(x)T(t)$. Reingehen in die Wellengleichung liefert:

$$\begin{aligned}\rho(x)\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}X(x) - \mu(x)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}T(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \rho(x)\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}X(x) &= \mu(x)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}T(t) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} &= \frac{\mu(x)}{\rho(x)}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Die linke Seite hängt nur von t ab, die rechte nur von x . D.h., dass

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\mu(x)}{\rho(x)}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \text{const} = \lambda \quad (2.18)$$

Daher erhalten wir 2 Gleichungen

- $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \lambda T(t)$
- $\mu(x)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \lambda\rho(x)X(x)$

Die zweite Gleichung ist eine Sturm-Liouville-Differentialgleichung. Solche Gleichungen sind äquivalent (Greensche Funktion – siehe Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen). Diese Tatsache, kombiniert mit dem Spektralsatz aus der Analysis III, liefert die theoretischen Grundlagen für die folgende Methode.

Beispiel: Die klassische schwingende Saite

Wir untersuchen die Wellengleichung für $\rho = \mu = 1$. Zu behandeln ist also

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.19)$$

unter den Anfangs- und Randbedingungen

- $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$
- $u(x, 0) = f(x)$
- $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad t \geq 0, x \in [0, \pi]$.

Wir benutzen Trennung der Variablen und machen den Ansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} X(x) &= \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} T(t) \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}}{T(t)} &= \frac{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}{X(x)} = \lambda \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} &= \lambda T(t), \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \lambda X(x). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Mit den Lösungen

- $T(t) = \cos(\sqrt{\lambda}t)$ bzw. $T(t) = \sin(\sqrt{\lambda}t)$
- $X(x) = \cos(\sqrt{\lambda}x)$ bzw. $X(x) = \sin(\sqrt{\lambda}x)$.

Setzen wir $\sqrt{\lambda} =: n$ sehen die Möglichkeiten für $u(x, t)$ daher wie folgt aus:

- $u(x, t) = \cos(nx) \sin(nt)$
- $u(x, t) = \sin(nx) \sin(nt)$
- $u(x, t) = \cos(nx) \cos(nt)$
- $u(x, t) = \sin(nx) \cos(nt)$.

Jetzt kommen die Anfangs-, und Randbedingungen ins Spiel. Wegen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ fallen die erste und dritte Lösungsmöglichkeit für u in der obigen Liste weg und es bleiben nur mehr $u(x, t) = \sin(nx) \sin(nt)$ und $u(x, t) = \sin(nx) \cos(nt)$ übrig.

Nun erfüllt aber auch jede Linearkombination der restlichen 2 Möglichkeiten die Wellengleichung (**Superpositionsprinzip**) und wir haben Lösungen der Gestalt

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) \sin(nt). \quad (2.21)$$

Nun verwenden wir die Randbedingung $u(x, 0) = f(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = f(x).$$

Es bieten sich daher für die Koeffizienten A_n nur die Fourier-Sinuskoeffizienten von f an, d.h.

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Zur Bestimmung der B_n nutzen wir die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ aus.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin(nx) \sin(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin(nx) \cos(nt) \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin(nx) = g(x).\end{aligned}$$

Also für B_n gilt:

$$B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi g(x) \sin(nx) dx.$$

Basteln wir alles zusammen, hat die Lösung $u(x, t)$ die Gestalt:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) \sin(nt) \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi f(u) \sin(nu) du \sin(nx) \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{1}{n} g(u) \sin(nu) du \sin(nx) \sin(nt) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(u) \sin(nu) du \sin(nx) \cos(nt) + \frac{1}{n} g(u) \sin(nu) du \sin(nx) \sin(nt) \right).\end{aligned}$$

2.2.2 Der zweidimensionale Fall

Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Gesucht ist eine Funktion $u(x, y, t)$ auf $\Omega \times \mathbf{R}_+$, die die Bewegung eines schwingenden Membrans beschreibt.

Bezeichnung: $\nabla_{x,y} u(x, y, t)$ bezeichne den Gradienten bezüglich der Ortskoordinaten.

In dieser Situation ist die Gesamtenergie gegeben durch

$$J(u) = E_{kin} + E_{pot} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dy dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left[\sqrt{1 + (\nabla_{x,y} u)^2} - 1 \right] dx dy dt$$

Approximieren wir den Wurzelausdruck mittels Taylor-Reihe erhalten wir

$$J(u) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dy dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |\nabla_{x,y} u|^2 dx dy dt \quad (2.22)$$

Die Gesamtenergie ist zu minimieren und wir berechnen daher $\frac{d}{d\epsilon} J(u + \epsilon v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (J(u + \epsilon v) - J(u)) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} (J(u + \epsilon v) - J(u)) &= \\ &= \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial(u + \epsilon v)}{\partial t} \right)^2 dx dy dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |\nabla_{x,y}(u + \epsilon v)|^2 dx dy dt \right) \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dy dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |\nabla_{x,y} u|^2 dx dy dt \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \epsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right) - \mu ((\nabla u | \nabla v) + \epsilon (\nabla v)^2) \right] dx dy dt \end{aligned}$$

Somit ist

$$\frac{d}{d\epsilon} J(u + \epsilon v) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \mu (\nabla u | \nabla v) \right] dx dy dt = 0$$

Partielle Integration bzgl. t beim ersten Integral und Argumentation wie im eindimensionalen Fall (v betreffend) liefert die **Wellengleichung**:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \Delta u = 0 \tag{2.23}$$

2.3 Das Dirichletproblem

Gegeben sei die Kreisscheibe $U = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ und eine Funktion $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}$ am Rand der Scheibe. Wir suchen eine harmonische Funktion $u : U \rightarrow \mathbf{R}$ sodass $u(1, \theta) = g(\theta)$ (in Polarkoordinaten). Man denke als Anwendung zum Beispiel an ein kreisförmiges Material mit Radius 1. Man kennt die Temperatur g am Rand des Materials und möchte wissen, wie die Temperaturverteilung im Inneren aussieht.

Wir lösen dieses Problem am besten mittels Polarkoordinaten. u soll harmonisch sein, d.h. $\Delta u = 0$. Die Laplacegleichung in Polarkoordinaten lautet (siehe Analysis II):

$$\Delta u(r, \theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \tag{2.24}$$

Mit dem Ansatz $u = R(r)\Theta(\theta)$ gehen wir in die Gleichung (2.24) rein (Trennung der Variablen):

$$\begin{aligned}\Delta u(r, \theta) &= \frac{d^2 R}{dr^2} \Theta(\theta) + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \Theta(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r) \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \Theta(\theta) \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} R(r) \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0 \\ &\Rightarrow \Theta(\theta) \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{r^2} R(r) \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \\ &\Rightarrow \frac{\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}}{\Theta(\theta)} = -\frac{r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr}}{R(r)} = \text{const} = \lambda\end{aligned}$$

Damit bekommen wir 2 Differentialgleichungen

- $\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -\lambda \Theta(\theta)$
- $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} = \lambda R(r)$

mit den Lösungen

- $\Theta(\theta) = \cos(\sqrt{\lambda}\theta)$ bzw. $\Theta(\theta) = \sin(\sqrt{\lambda}\theta)$
- $R(r) = r^{\sqrt{\lambda}}$ bzw. $R(r) = r^{-\sqrt{\lambda}}$

Die Lösung $R(r) = r^{-\sqrt{\lambda}}$ kann man ausschließen, da sie bei $r = 0$ eine Singularität haben. Also kommen für $u = R(r)\Theta(\theta)$ folgende Möglichkeiten in Frage:

- $R(r) = r^{\sqrt{\lambda}} \cos(\sqrt{\lambda}\theta)$
- $R(r) = r^{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}\theta)$

Setzen wir $\sqrt{\lambda} =: n$ (wegen Periodizität) und wenden wir das Superpositionsprinzip an, erhalten wir Lösungen der Gestalt

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n \cos(n\theta) + b_n r^n \sin(n\theta)) \quad (2.25)$$

Jetzt haben wir noch die Nebenbedingung $u(1, \theta) = g(\theta)$, also

$$u(1, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) = g(\theta) \quad (2.26)$$

Wir sehen somit, dass a_n und b_n die Fourier-Koeffizienten von g sind — damit $u(1, \theta)$ die Fourier-Reihe von g liefert.

Die Koeffizienten a_n und b_n sind daher gegeben durch

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos(n\theta) d\theta \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin(n\theta) d\theta\end{aligned} \quad (2.27)$$

Das führt dann zur folgenden Darstellung unserer **Lösung des Dirichletproblems**:

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi) d\phi + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(\int_0^{2\pi} g(\phi) \cos(n\phi) d\phi \cos(n\theta) + \int_0^{2\pi} g(\phi) \sin(n\phi) d\phi \sin(n\theta) \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

Das Dirichletproblem mit komplexer Fourier-Reihe

Um die Bequemlichkeit der komplexen Schreibweise zu illustrieren, betrachten wir das Dirichletproblem nochmal und steigen bei der Rechnung oben nach der Trennung der Variablen ein. Für $n \in \mathbf{Z}$ ist nun $u(r, \theta) = r^n e^{in\theta}$ eine Lösung. Mit dem Superpositionsprinzip haben wir Lösungen der Gestalt:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}
 \tag{2.29}$$

Beachten wir die Nebenbedingung $u(1, \theta) = g(\theta)$, erhalten wir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = g(\theta)
 \tag{2.30}$$

Wir wählen also

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta
 \tag{2.31}$$

Damit bekommen wir die Lösung

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi) e^{-in\phi} d\phi \right) r^n e^{in\theta} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n e^{in(\theta-\phi)} \right) g(\phi) d\phi
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

BEMERKUNG: Die Lösung u ist ein Faltungsintegral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_r(\theta - \phi) g(\phi) d\phi
 \tag{2.33}$$

mit dem sogenannten **Poisson-Kern**

$$\begin{aligned} K_r(\psi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n e^{in\psi} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{in\psi} + e^{-in\psi}) \text{ (geometrische Reihe)} \\ &= 1 + \left(\frac{re^{i\psi}}{1 - re^{i\psi}} + \frac{re^{-i\psi}}{1 - re^{-i\psi}} \right) \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \psi + r^2} \end{aligned}$$

Kapitel 3

Distributionen

In diesem Kapitel bringen wir eine axiomatische Darstellung der Theorie der Distributionen. Wir beginnen mit der Bemerkung, dass der Inhalt der Vorlesungen Analysis I und II aus der folgenden Axiomatik ableitbar ist.

3.1 Axiome von Peano

Das Zahlensystem \mathbf{N} besitzt folgende Eigenschaften:

- $1 \in \mathbf{N}$
- Jedes $n \in \mathbf{N}$ hat einen Nachfolger n' . Jedes $m \in \mathbf{N}$, $m \neq 1$, ist der Nachfolger von genau 1 Element.
- Falls $A \subset \mathbf{N}$ mit
 - $1 \in A$
 - $n \in \mathbf{N} \Rightarrow n' \in A$

Dann ist $A = \mathbf{N}$.

Diese Axiomatik besitzt zwei wesentliche Eigenschaften

- a) Sie ist **konsistent** (besitzt ein Modell)
- b) Sie ist **kategorial** (alle Modelle sind isomorph).

Aus dem Zahlensystem \mathbf{N} kann man mit Hilfe von (einfachen) mengentheoretischen Konstruktionen die weitere Systeme \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , (\mathbf{C}, \mathbf{H}) gewinnen.

Weitere Beispiele von axiomatischen Systemen:

Euklidische Geometrie (in der Axiomatik von Hilbert) — konsistent und kategorial;

Gruppen — konsistent, aber nicht kategorial (viele Modelle)

Metrische Räume, Vektorräume, Banachräume...

3.2 Axiomatik der Distributionen

Schreibweise: $C([0, 1])$ ist der Banachraum der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$; $C^1[0, 1]$ – der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen.
 $D : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ist der Differentiationsoperator.

Axiomatik:

- A. Es existiert ein Raum E , sodass
 - E ist Vektorraum, der $C[0, 1]$ als Teilraum enthält.
- B. Es gibt einen linearen Operator $\tilde{D} : E \rightarrow E$ sodass $Df = \tilde{D}f$, falls $f \in C^1$.
- C. Falls $T \in E$, dann existiert $f \in C[0, 1], n \in \mathbf{N}$ sodass $T = \tilde{D}^n f$.
- D. Falls $T \in E$ mit $\tilde{D}^n T = 0$, dann ist T ein Polynom vom Grad $\leq n - 1$.

Behauptung: Diese Axiomatik (wie die von Peano) ist konsistent und kategoriell.

Beweisskizze: Wir setzen

$$E_n = \{[f_0, \dots, f_n] : f_0, \dots, f_n \in C([0, 1])\}.$$

[...] bezeichnet die Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation $(f_0, \dots, f_n) \sim (g_0, \dots, g_n) \Leftrightarrow I^n(f_0 + g_0) + I^{n-1}(f_1 - g_1) + \dots + (f_n - g_n)$ ein Polynom vom Grad $\leq n - 1$.

$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, mit dem Operator $\tilde{D} : [(f_0, \dots, f_n)] \mapsto [(0, f_0, \dots, f_n)]$ (vgl. Skriptum Distributionentheorie).

Motivierendes Beispiel: Sei δ die Delta-Distribution. Aus formalen Gründen hat die Lösung des Dirichletproblems mit Randwert $u(1, \theta) = \delta(\theta)$ die Gestalt:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\pi\theta.$$

Wir verwenden die Theorie der Distributionen, um dieser Lösung eine fundierte Basis zu geben.

Dazu verwenden wir die Tatsache, dass wir die Axiomatik der Distributionen verwenden können, um eine distributionelle Version der Analysis I elementar zu begründen (siehe Vorlesung “Distributionentheorie”).

Als Beispiel erwähnen wir die folgende

Definition 3.2.1 Eine Folge (f_n) von Distributionen konvergiert gegen f wenn eine Folge (F_n) aus $C(I)$ und $F \in C(I)$ existieren, sodass

- $(F_n) \rightarrow F$ gleichmässig
- es existiert $k \in \mathbf{N}$ mit $f_n = \tilde{D}^k F_n, f = \tilde{D}^k F$.

Wir haben postuliert, dass stetige Funktionen Distributionen sind. In der Tat gilt:

Wenn $f \in L^1(I)$, dann ist $F(x) = \int_0^x f(u) du$ stetig. (Siehe Vorlesung Analysis III.) Wir identifizieren dann f mit der distributionellen Ableitung von F .

Formel für die distributionelle Ableitung von Funktionen mit klassischen Singularitäten.

Wir können dann die δ Distribution als Ableitung der Heaviside-Funktion definieren. Allgemeiner: der folgende Ausdruck für die Ableitungen einer stückweise glatten Funktion mit Singularitäten a_1, \dots, a_k ist wesentlich

$$\tilde{D}^n x = x^{(n)} + \sum_{i,j} \sigma_{a_i}^j \delta_{a_i}^{(n-1-j)}.$$

Hier ist $\delta_{a_i}^{(r)}$ die r te Ableitung der δ Funktion mit Singularität an Stelle a_i .

$x^{(r)}$ ist die klassische (punktweise) Ableitung. $\sigma_{a_i}^j$ ist der Sprung der j -ten Ableitung von x an der Stelle a_j d.h.

$$\sigma_{a_i}^j = \lim_{s \rightarrow a_i^+} x^j(s) - \lim_{s \rightarrow a_i^-} x^j(s)$$

Spezialfall: *eine* Sprungstelle

$$\tilde{D}^n x = x^{(n)} + \sum_{i,j} \sigma_{a_0}^j \delta_{a_0}^{(n-1-j)}.$$

3.3 Periodische Distributionen und Fourierreihen

Wir werden jetzt die Fourierreihe der δ -Distribution berechnen. Eine Distribution x auf \mathbf{R} heisst $h - 0$ periodisch, falls $x(s+h) = x(s)$. Insbesondere ist jede periodische Funktion eine periodische Distribution.

Der Einfachheit wegen betrachten wir den Fall $h = 1$:

Beispiel: $\cos(2\pi ks), \sin(2\pi ks), \exp(i2\pi ks)$, allgemeine trigonometrische Polynome der Gestalt $\sum_{k=1} a_n \cos(2\pi ks) + b_n \sin(2\pi ks)$ sind 1-periodisch.

Beispiel: Betrachte die periodische Erweiterung der Funktion $x : t \rightarrow t^2 - t$.

Die Fourierreihe von x ist $-\frac{1}{6} - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} \exp(2\pi int)$ (elementare Rechnung).

Wir berechnen:

$$\tilde{D}^2 x = \sum_{n \neq 0} \exp(2\pi i n t)$$

Da die periodische Erweiterung von x stückweise stetig differenzierbar ist, können wir die obige Formel verwenden, um $\tilde{D}x$ auszurechnen. Damit bekommen wir die Formel

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp(2\pi i n t)$$

für die periodische δ -Funktion (Fourierreihe in der komplexen Version).

Daraus folgt:

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n^{(k)} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (2\pi i n)^k \exp(2\pi i n t) \quad (3.1)$$

Mit ähnlichen Methoden beweist man den

Satz 3.3.1 Die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(inx)$ konvergiert falls $(c_n) \in O(|n|^k)$ d.h. es existieren $K > 0$, $k \in \mathbf{N}$, sodass $|c_n| \leq K|n|^k$, $(n \in \mathbf{Z})$.

Umgekehrt gilt: ist f eine periodische Distribution, dann existiert eine Folge $(c_n) \in O(|n|^k)$ sodass $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(2\pi i n t)$.

Nocheinmal betrachten wir die Lösungen

- der Gleichung der schwingenden Saite

$$\text{Lösung: } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx) \cos(nt) \text{ wobei}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(u) \sin(nu) du, \quad b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} g(u) \sin(nu) du$$

Man sieht, dass diese Reihen konvergieren (in distributionellem Sinn), auch für Distributionen f, g (da $(a_n), (b_n) \in O(n^k)$). Damit bekommen wir Lösungen für den Fall, wo die Randbedingungen Distributionen sind. Außerdem sind die formellen Berechnungen von früher jetzt berechtigt.

Ähnlich für das Dirichletproblem $u(r, \theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$

Randbedingung: $u(1, \theta) = f(\theta)$. Hier

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

Wieder ist die Konvergenz abgesichert, da $|a_n| \in O(n^k)$, $|b_n| \in O(n^k)$, $k \in \mathbf{N}$, falls der Randwert f eine Distribution ist.

Bemerkung: Die Konvergenz sogar im C^∞ -Sinn auf dem Gebiet $\{(x^2 + y^2) < 1\}$.

3.4 Axiomatik der Distributionen auf S^1

Motivation: $f \in L_0^2(S^1)$ hat die komplexe Fourierdarstellung:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \exp(inx) \text{ mit } \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n|^2 < \infty, c_0 \neq 0.$$

($L_0^2(S^1)$ bezeichnet den Raum der Funktionen mit Erwartungswert 0.)

Formal gilt dann

$$\Delta(f) = - \sum_{n \in \mathbf{Z}} n^2 c_n \exp(inx)$$

Wir betrachten daher Räume von Funktionen (Distributionen) mit Mittelwert 0 (d.h. $c_0 = 0$) (damit der Laplace-Operator injektiv wird) und wir definieren den Inversoperator: $I(f) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} -\frac{c_n}{n^2} \exp(inx)$

Wir bringen jetzt eine Version der Axiomatik, die für den Raum $C_0^{-\infty}(S^1)$ der Distributionen (mit Mittelwert 0) auf S^1 gültig ist.

Der Raum $C_0^{-\infty}(S^1)$ erfüllt die Axiome:

- $L_0^2(S^1) \subseteq C_0^{-\infty}(S^1)$ als Vektorraum;
- Es existiert ein linearer Operator $\tilde{\Delta} : C_0^{-\infty}(S^1) \rightarrow C_0^{-\infty}(S^1)$ sodass für f zweimal stetig differenzierbar gilt: $\tilde{\Delta}f = \Delta f$;
- $\tilde{\Delta}f = 0 \implies f = 0$;
- $f \in C_0^{-\infty}(S^1) \implies$ es existiert $F \in C_0(S^1)$ und $n \in \mathbf{N}$ mit $f = \tilde{\Delta}^n F$.

Existenz eines Modells: Man setzt $C_0^{-\infty}(S^1) = [(f, n)]$ wobei $f \in C_0(S^1)$. Die entsprechende Äquivalenzfunktion ist $(f, n) \sim (g, m) \iff f = I^{n-m}g$ (falls $m \leq n$). $\tilde{\Delta}$ wird wie folgt definiert: $\tilde{\Delta}[(f, n)] = [(f, n+1)]$.

Definition 3.4.1 (Konvergenz von Folgen $\in C_0^{-\infty}(S^1)$):

$f_k \mapsto f$ in $C_0^{-\infty}(S^1) \iff$ es ex. $n \in \mathbf{N}$, eine Folge (F) aus $C_0(S^1)$ sodass $F_k \rightarrow F$ gleichmässig und $f_k = \Delta^n F_k, f = \Delta^n F$.

Der zentrale Satz über $C^{-\infty}(S^1)$ ist dann:

Satz 3.4.2 Jede Distribution $f \in C^{-\infty}(S^1)$ hat eine Fourierreihendarstellung $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \exp(inx)$ mit $(c_n) \in O(|n|^k)$ für ein $k \in \mathbf{N}$. Umgekehrt, falls $(c_n) \in O(|n|^k)$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \exp(inx)$ in $C_0^{-\infty}(S^1)$.

3.5 Distributionen auf S^2 und sphärische Funktionen

Wir skizzieren kurz, wie man Distributionen auf S^2 definiert:

Schritt 1: Wir berechnen den Laplace-Operator für S^2 . Klassisch verwendet man sphärische Koordinaten r, θ, ϕ .

d.h. $x = r \cos \theta \sin \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \phi$.

Stattdessen verwenden wir Koordinaten

$$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}, v = \theta, w = \cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Es gilt dann (elementare Rechnung):

$$\Delta f = \frac{\partial}{\partial u} \left(9u^{\frac{4}{3}} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{u^{-\frac{2}{3}}}{1-w^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + u^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial w} \left((1-w^2) \frac{\partial f}{\partial w} \right).$$

Beispiel 1: Trennung der Variablen in der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(gu^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{1}{u^{\frac{2}{3}}(1-w^2)} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{1}{u^{\frac{2}{3}}} \frac{\partial}{\partial w} \left((1-w^2) \frac{\partial f}{\partial w} \right) = 0.$$

Der Ansatz: $f(u, v, w) = U(u)V(v)W(w)$ führt zu der Gleichung

$$\frac{1}{U}(1-w^2)u^{\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial u} \left(9u^{\frac{4}{3}} U' \right) + \frac{1}{W}(1-w^2) \frac{\partial}{\partial w} [(1-w^2)W'] = \frac{-V''}{V}.$$

Wegen Periodizität ist $\frac{-V''}{V} = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$) mit Lösungen $\cos mv$, $\sin mv$.

Damit bekommen wir die Gleichung

$$\frac{1}{U} u^{\frac{2}{3}} \frac{d}{du} (9u^{\frac{4}{3}} U') = \frac{m^2}{1-w^2} - \frac{1}{W} \frac{d}{dw} [(1-w^2)W'] = \lambda.$$

Das führt zu der Eulerschen Gleichung:

$$12uU' + 9u^2U'' = \lambda U$$

mit Lösungen u^ρ wobei $9\rho^2 + 3\rho = \lambda$.

Da $u = r^3$ gilt $r^n = u^{\frac{n}{3}}$. Damit haben wir Lösungen der Gestalt r^n ($n \in \mathbb{N}$) und somit $\lambda = n(n+1)$. Das liefert die Gleichung:

$$(1-w^2)W'' - 2wW' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-w^2} \right] W = 0$$

für W .

Diese Gleichung werden wir später geneauer untersuchen, um Information über die Spektraleigenschaften der Kugel zu bekommen.

Mit Hilfe dieses Operators kann man analog wie oben eine Axiomatik für den Raum der Distributionen auf der zwei-dimensionalen Sphäre S^2 formulieren. Diese Axiomatik ist wieder konsistent und kategoriell. Wir werden später den obigen Laplace-Operator bzw. das Spektrum davon mit Hilfe einer Trennung der Variablen genauer untersuchen und damit konkrete Informationen über Distributionen auf S^2 gewinnen (insbesondere um zu zeigen, dass die Axiomatik obige Eigenschaften erfüllt).

3.6 Anwendung der distributionellen Fourierreihen – das Isoperimetrische Problem

Als Anwendung der Theorie der Distributionen auf S^1 bringen wir eine Lösung des isoperimetrischen Problems. Wir verwenden eine klassische Methode von Ha?. Der Vorteil der Anwendung der Distributionentheorie liegt darin, dass wir keine irrelevante Glattheitsbedingung verlangen. Gesucht ist die geschlossene Kurve c , mit fester Länge ($= 2\pi$), sodass der Inhalt $A(c)$ der eingeschlossenen Fläche maximal. Wir verwenden die Bogenlängenparametrisierung $(x(s), y(s))$ ($s \in [0, 2\pi]$) von c , d.h. $\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} = 1$ (siehe Vorlesung Differentialgeometrie).

x und y haben Fourier Reihen:

$$x(s) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad (3.2)$$

und

$$y(s) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx)), \quad (3.3)$$

wobei $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \cos(kx) dx$ und $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \sin(kx) dx$. Analog für c_k und d_k .

O.B.d.A sei nun der Schwerpunkt in $(0, 0)$, d.h. $a_0 = c_0 = 0$. Aus der Formel

$$\ell(C) = \left(\int_0^{2\pi} x'(s)^2 + y'(s)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

für die Länge gilt

$$\ell(C)^2 = 2\pi \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) \right).$$

Nach dem Satz von Green erhalten wir für den Inhalt:

$$A(c) : \int_0^{2\pi} x(s)y'(s)ds = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (k(a_k d_k - b_k c_k)). \quad (3.5)$$

Wir berechnen jetzt

$$\begin{aligned}\rho(C)^2 - 4\pi A &= 2\pi^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) - 2k(k(a_k d_k - b_k c_k)) \right) \\ &= 2\pi^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (ka_k - d_k)^2 + (kb_k + c_k)^2 + (k^2 - 1)(c_k^2 + c_k^2) \right) \geq 0\end{aligned}\quad (3.6)$$

und erhalten die Isoperimetrische Ungleichung

$$\rho(C)^2 - 4\pi A \geq 0\quad (3.7)$$

wobei Gleichheit nur für den Kreis gilt.

Kapitel 4

Mannigfaltigkeiten

Eine Mannigfaltigkeit ist ein Objekt mit einer Struktur, die es erlaubt, Funktionen darauf zu differenzieren, d.h. sie schauen lokal wie \mathbf{R}^n aus. Identifizieren wir "diffeomorphe" Mannigfaltigkeiten, so gibt es in Dimension 1 nur zwei Mannigfaltigkeiten (ohne Rand) – S^1 (der Kreis und \mathbf{R}). Wir interessieren uns hier nur für kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand. Wir verzichten auf eine formale Definition (siehe Vorlesung Höhere Differentialgeometrie) und beschreiben einige Mannigfaltigkeiten, die uns beschäftigen werden.

4.1 Graphische Darstellung von Mannigfaltigkeiten

Zu Beginn betrachten wir die Graphische Darstellung von 1,2 und 3 Dimensionalen Mannigfaltigkeiten und wie man sie aus einem Quadrat (für 2 Dimensionalen) bzw. dem Würfel (für 3 Dimensionalen) herleiten kann.

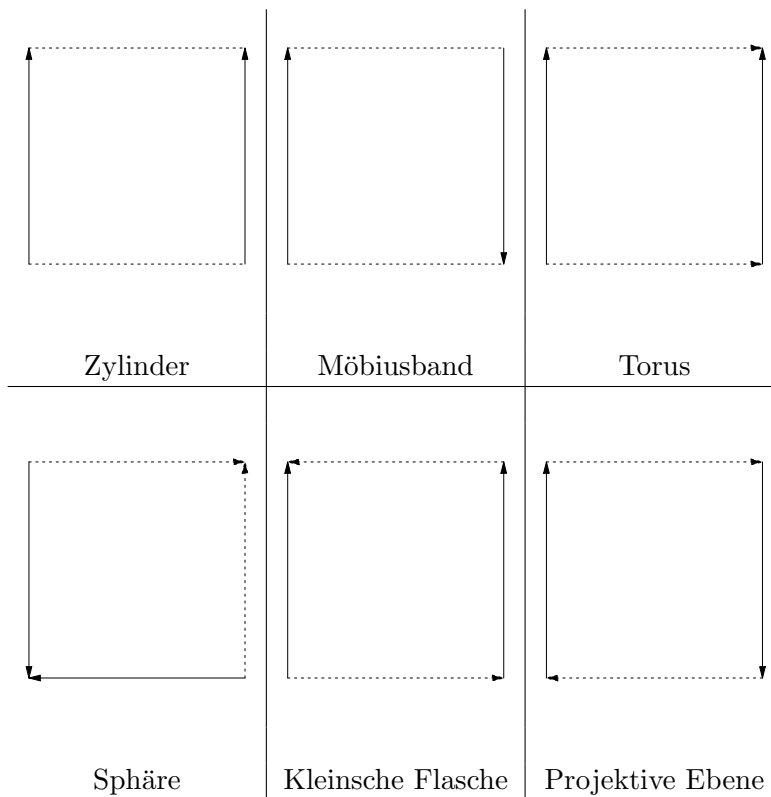
4.1.1 Mannigfaltigkeiten als Quotientenräume

Die folgenden 2-dimensional Mannigfaltigkeiten kann man als Quotientenräume des Würfels $I^2 (= [0, 1] \times [0, 1])$ bzgl. geeigneter Äquivalenzrelationen wie im Bild angedeutet. Der Zylinder (mit Rand), der Möbiusband (nicht orientierbar, mit Rand), der Torus \mathbf{T}^2 , die Kleinsche Flasche (nicht orientierbar), die projektive Ebene (nicht orientierbar).

Diese Mannigfaltigkeiten sind flach (ohne Krümmung). Für uns bedeutet dies, dass der entsprechende Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten die klassische Gestalt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ (bzw. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{)}.$$

Andere Mannigfaltigkeiten haben eine Krümmung. Dies wird gegeben durch eine 2×2 Matrik $G := [g_{ij}(u, v)]$, sodass G positiv definit ist (metrischer Tensor).



Falls M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit metrischen Tensor $[g_{ij}]$ dann hat man automatisch ein natürliches Mass mit Dichte $\sqrt{g} dudv$, wobei $g = \det[g_{ij}]$ ist.

Der Laplace-Beltrami Operator ist dann

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial u_j} \right). \quad (4.1)$$

(Man bekommt diesen Operator wie oben aus der Optimierungsaufgabe

$$\sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \frac{\partial \Phi}{\partial u_j} \rightarrow \min),$$

wobei $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$ ist.

In dieser Situation gilt:

Das Spektrum von Δ besteht aus einer ONB (x_n) von Eigenvektoren in $L^2(M)$. Die Eigenwerte (λ_n) sind asymptotisch wie (n^α) , wobei α von der Dimension von M abhängt.

Damit kann man wie oben einen Distributionenraum $C^{-\infty}(M)$ konstruieren.

Als Konsequenz bekommt man einen Entwicklungssatz: Jede Distribution hat eine Darstellung $\sum a_n x_n$ wobei $(a_n) \in O(n^k)$ (für ein k) und umgekehrt.

Wir werden die Spezialfälle $M = \mathbf{T}^2$, die Kleinsche Flasche, die projektive Ebene S^2 genauer untersuchen.

In diesen Fällen können wir das Spektrum explizit anschauen. Der Grund dafür liegt in der Anwesenheit von Symmetrie. Dazu die

Definition 4.1.1 Sei Ω eine Menge. $Per(\Omega)$ ist die Familie aller Bijektionen auf Ω . Weiters ist dies eine Gruppe bezüglich der Zusammensetzung: D.h. wir haben eine Operation $(f, g) \mapsto f \circ g$ und es gilt:

- $id \circ f = f \circ id = f$
- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ (Assoziativität)
- $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$

Definition 4.1.2 Eine Transformationsgruppe auf Ω ist eine Teilmenge $G \preceq Per(\Omega)$ sodass

- $f, g \in G \implies f \circ g$ und $f^{-1} \in G$
- $id \in G$

4.1.2 Beispiele von Transformationsgruppen:

KONTINUIERLICHE:

$Isom(\mathbf{R}^2)$ die Isometrie von \mathbf{R}^2 . $Isom(\mathbf{R}^2)$ lässt sich explizit Ausrechnen:

Jede Isometrie hat die Gestalt:

$X \mapsto AX + C$ wobei $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ und $C = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ und A eine 2×2 Matrix

mit $A^t A = I$ ist. Für A gibt es nur 2 Möglichkeiten:

$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ Drehmatrix

oder $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ Spiegelung

Daraus folgt: Jede Isometrie in \mathbf{R}^2 ist entweder eine Drehung, eine Verschiebung, eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung.

Falls G eine Transformationsgruppe auf z.B. \mathbf{R}^2 ist, dann ist $x \sim_G \iff$. Es existiert $g \in G$ mit $g(x) = y$. Das ist eine Äquivalenzrelation. Wir bezeichnen den entsprechenden Quotientenraum mit $\mathbf{R}^2|_G$.

Falls G diskret ist, dann ist $\mathbf{R}^2|_G$ eine Mannigfaltigkeit.

Auf diese Art entstehen \mathbf{T}^2 , die Kleinsche Flasche und die projektive Ebene als Quotienten von \mathbf{R}^2 .

4.2 Das Spektrum von \mathbf{T}^2 , \mathbf{K}

Betrachtet man diese Mannigfaltigkeiten als Quotientenräume $\mathbf{R}^2|_r$ für geeignete Gruppen, so bekommt man die Eigenfunktionen von Δ wie folgt. Man untersucht zunächst die Funktionen

$$f_{\lambda,\mu}(x,y) = e^{\lambda x} e^{\mu y}.$$

Eigenfunktionen sind (entsprechende Eigenwerte $\lambda^2 + \mu^2$). Um die Eigenfunktionen (und damit Eigenwerte) für Δ auf $\mathbf{R}^2|_r$ zu bekommen, untersucht man, welche $f_{\lambda,\mu}$ die entsprechenden Symmetrieeigenschaften haben.

I. Der Torus \mathbf{T}

Eigenfunktionen: $f_{(2\pi im, 2\pi in)}$

Eigenwerte: $4\pi^2(m^2 + n^2)$.

II. Die Kleinsche Flasche $K(a,b)$.

Die Eigenfunktionen und Eigenwerte von $T(s,b)$ sind $P_{(2\pi i \frac{n}{a}, 2\pi i \frac{n}{b})}$ ($m, n \in \mathbf{Z}$).

Die entsprechenden Eigenwerte $4\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$.

Wir suchen diejenige Eigenfunktionen, für die gilt:

$$f(x,y) = f\left(x + \frac{a}{2}, -y\right).$$

Ergebnis:

$$e^{2\pi i \frac{mx}{a}} \cos \frac{ny}{b} \quad (m \text{ gerade}, n \geq 0)$$

$$e^{2\pi i \frac{mx}{a}} \sin \frac{ny}{b} \quad (m \text{ ungerade}, n \neq 0).$$

Eigenwerte:

$$4\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (m, n \in \mathbf{Z}, \text{ mit } n \neq 0 \text{ falls } m\text{-ungerade}).$$

Das Spektrum von S^2 : Um das Spektrum von Δ auf S^2 zu untersuchen, brauchen wir klassische Tatsachen über die Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0 \quad (\text{vgl.}\dots)$$

Wir bringen eine kurze Zusammenfassung, wobei wir ziemlich indirekt vorgehen. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (Sturm? Gleichungen + Existenz einer Greenschen Funktion), zusammen mit dem Spektralsatz aus der Analysis III wissen wir, dass die Eigenfunktionen eine ONB auf $[-1, 1]$ bilden.

Wir betrachten jetzt die Folge (P_n) , wobei P_n ein Polynom von Grad n ist, wobei

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n((x^2 - 1)^n).$$

Die Folge nennt man die Folge der **Legendreschen Polynome**. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes sieht man, dass

$$P_n(x) = \sum_{\substack{r=0 \\ 2r-n \geq 0}}^n (-1)^{n-r} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1)}{(n-r)!(2r-n)!2^{n-r}} x^{2r-n}.$$

Partielle Integration zeigt: $\int_{-1}^1 P_n(x)x^m dx = 0$ ($m < n$) – daher

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0 \quad m \neq n.$$

Wieder durch partielle Integration bekommt man die Aussage

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{(2n+1)}.$$

Damit ist (ϕ_n) eine ONB auf $[-1, 1]$, wobei $\phi_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$.

Um den Übergang zu den Legendreschen Funktionen höherer Ordnung zu erlauben, betrachten wir zunächst den Fall $m = 1$. Sei $z_n = P'_n(x)\sqrt{1-x^2}$. Die Gleichung für z_n ist

$$[(1-x^2)z']' - \frac{z}{1-x^2} + \lambda z = 0$$

mit Eigenwerten $\lambda = n(n+1)$ ($n \in \mathbf{N}$) und Eigenfunktionen z_n . Wir bezeichnen diese Funktionen mit $P_{n,1}$ – die Legendreschen Funktionen erster Ordnung. Allgemeiner: Wir setzen

$$P_{n,h}(x) = (1-x^2)^{h/2} D^n P_n(x) =$$

$z = P_{n,H}(x)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$((1-x^2)z')' - \frac{h^2 z}{1-x^2} + \lambda z = 0$$

mit Eigenwerten $\lambda = n(n+1)$ ($n < h, h > 1, \dots$).

Es gilt:

$$\int_{-1}^1 P_{m,n}(x)P_{n,h}(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+h)!}{(n-h)!} \quad m = n.$$

Die Differentialgleichung

Falls $u = (x^2 - 1)^n$, dann gilt:

$$(x^2 - 1)u' = 2nxu.$$

Differenziert man diese Gleichung $(n + 1)$ mal und verwendet man die Tatsache, dass $D^n u = 2^n n! y$ ($y = P_n$), so sieht man, dass P_n eine Lösung der Differentialgleichung

$$[(x^2 - 1)y']' n(n + 1)y = 0.$$

Das ist der Fall $m = 0$ der Gleichung (S. ...)

Erzeugende Funktionen: Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2ux + u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)u^n.$$

(Denn falls $\frac{1}{\sqrt{1 - 2ax + u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)u^n$, wobei Q_n ein Polynom von Grad n , dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}} = \sum_{n,m=0}^{\infty} Q_n(x)Q_m(x)u^n v^m.$$

Integriert man von -1 bis 1 , so sieht man

$$LS = \frac{1}{\sqrt{uv}} \ln \frac{1 + \sqrt{uv}}{1 - \sqrt{uv}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n + 1} u^n v^n$$

also

$$\int_{-1}^1 Q_1(x)Q_n(x) dx = \frac{2}{2n + 1} \quad n = m.$$

Da $Q_n(0) = 1 = P_n(0)$ folgert man, dass (Q_n) und (P_n) identisch sind.

Zusammenfassend: Die Kugelfunktionen

$$\cos mx P_{n,m}(x) \text{ bzw. } \sin mx P_{n,m}(x)$$

bilden eine Orthogonalbasis für $L^2(S^2)$ und jede Distribution hat eine Darstellung

$$\sum_{m,n} (a_{mn} \cos mx P_{n,m}(x) + b_{mn} \sin mx P_{n,m}(x))$$

mit langsam wachsenden Koeffizientenfolgen $(a_{mn}), (b_{mn})$.

Für die n -dimensional Sphäre S^n gilt: Sei \mathcal{H}_k der Raum aller homogenen harmonischen Polynome von Grad k . Jedes $p \in \mathcal{H}_k$ ist eine Eigenfunktion von Δ auf S^n (mit Eigenwert $k(n + k - 1)$). Alle Eigenfunktionen haben diese Gestalt. Damit können wir unsere Theorie auf S^n übertragen. Wir bekommen einen Raum $C^{-\infty_0}(S^n)$ von Distributionen auf S^n und den Entwicklungssatz:

Jede Distribution hat eine Darstellung

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k \text{ mit } f_k \in \mathcal{H}_k \text{ (normiert)}$$

und $(a_k) \in O(k^r)$ für ein $r \in \mathbf{N}$. Es gilt

$$\Delta T = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(n+k-1) f_k.$$

Bemerkung: Die Vielfachheit von $\lambda_k = k(n+k-1)$ (d.h. die Dimension von \mathcal{H}_k ist $\frac{(n+k-2)(n+k-3) \cdots (n+1)n(n+2k-1)}{k!}$).

Kapitel 5

Spektraltheorie

Der allgemeine Hintergrund für das Spektralverhalten der klassischen Operatoren liegt in der folgenden Tatsache (vgl. Vorlesung Analysis III):

5.1 Unendlich-dimensionaler Spektralsatz

Satz 5.1.1 Sei S ein **kompakter, selbstadjungierter** Operator auf dem separablen Hilbertraum H . Dann existiert eine **Orthonormalbasis** (x_n) für H und eine Folge (λ_n) in \mathbf{R} mit $\lambda_n \rightarrow 0$ so, dass

$$Sx_n = \lambda_n x_n. \quad (5.1)$$

Die Spektraltheorie der Sphäre

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \quad (5.2)$$

Dazu verwendet man sphärische Koordinaten: (r, θ, ϕ) wobei :

$$x = r \cos \theta \sin \phi \quad (5.3)$$

$$y = r \sin \theta \cos \phi \quad (5.4)$$

$$z = r \cos \phi \quad (5.5)$$

Wie wir oben gesehen haben, hat der Laplace-Operator die Gestalt:

Seite 35 fehlt

Abhängig von ϕ ist $\phi(\phi) = M(\mu)$ (wobei $\mu = \cos(\theta)$ und $M(\mu)$ eine Lösung ist von der (verallgemeinerten) **Legendre Gleichung**:

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right\} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right\} M(\mu) = 0 \quad (5.6)$$

Das führt zu der Familie der Kugelflächenfunktionen

$$\cos(n\theta)T_n^m \text{ bzw. } \sin(n\theta)T_n^m(\cos(\phi)) \quad (5.7)$$

wobei T_n^m die sogenannten verallgemeinerten **Legendre Funktionen** sind. Nun schreiben wir die Lösungen explizit hin. Das führt zunächst zu dem Begriff der **Legendre Polynomen** :

- Zugang: Man verwendet das Gram-Schmidtverfahren auf $[1, t, t^2, t^3, \dots]$ in $L^2[-1, 1]$ d.h., bzgl. des Skalarproduktes $(\frac{f}{g}) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$. Man bezeichnet das Ergebnis mit $\{p_n(t)\}$
- Weitere Beschreibungen: Wir betrachten den **Poissonschen Kern**:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \cos \phi + 1}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\mu + 1}} \quad (5.8)$$

Mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes, kann man diesen Kern als Potenzreihe in r schreiben, wobei die Koeffizienten von μ abhängig sind

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\mu + 1}} = \sum_{n=0}^{-\infty} P_n(\mu)r^n \quad (5.9)$$

P_n ist das Legendre Polynom vom Grad n

- Formel von **Rodriguez**

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n \quad (5.10)$$

(Man zeigt für $f_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n$ gilt:

$$\int_{-1}^1 f_n(t)t^k dt = 0 \quad k < n \quad (5.11)$$

Daraus folgt P_n (wie beim ersten Punkt) erfüllt die Formel von Rodrigues. Aus dem zweiten und dritten Punkt bekommt man explizite Darstellungen von $P_n(\mu)$ und diese stimmen überein. Aus der Formel von Rodriguez sieht man, dass $P_n(\mu)$ eine Lösung der Differentialgleichung.

$$\frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2) \frac{dP_n}{d\mu} + n(n+1)P_n(\mu) = 0$$

ist. Allgemein gilt:

$$P_n^m(x) = (x^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \quad (0 \leq m \leq n) \quad (5.12)$$

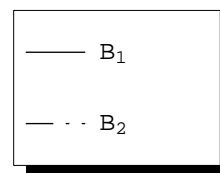
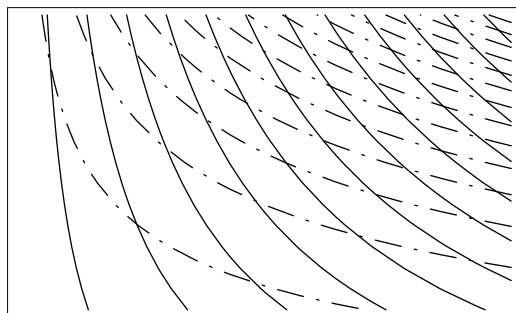
und ist eine Lösung der assoziierten Legendre Gleichung.

Kapitel 6

Die Samuelsonsche Konfiguration

In diesem Kapitel verwenden wir eine geometrische Bedingung, die von dem Wirtschaftstheoretiker P.A. Samuelson stammt, um die Existenz einer Energiefunktion nachzuweisen. Die Ausgangssituation wird durch folgendes Beispiel angedeutet:

Skizze in \mathbf{R}^2
 $u, v : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$
 $\mathcal{B}_1 = \{u \leq c\}$
 $\mathcal{B}_2 = \{v \leq d\}$



Definition 6.0.2 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, d.h. Ω ist eine Menge, \mathcal{A} eine Familie von Teilmengen, sodass

- \emptyset und $\Omega \in \mathcal{A}$;
- $A \in \mathcal{A}$ impliziert $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$;
- $A, B \in \mathcal{A}$ impliziert $A \cup B \in \mathcal{A}$;
- falls (A_n) eine Folge aus \mathcal{A} ist, dann $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

\mathcal{A} heißt dann eine σ -Algebra. Wir setzen voraus, dass wir einen Maß μ darauf haben (vgl. Vorlesung Analysis III). (Der Einfachheit wegen können wir annehmen, dass $\Omega = \mathbf{R}^2$ mit Lebesgue-Maß.) Gegeben sind zwei Mengenfamilien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ von meßbaren Teilmengen von Ω . $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sind dabei **total geordnet**, d.h.,

$$A, B \in \mathcal{B}_1 \Rightarrow A \subseteq B \text{ oder } B \subseteq A \quad (6.1)$$

Definition 6.0.3 $(\Omega, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ ist eine **Samuelson Konfiguration** (oder eine *S-Konfiguration*), wenn

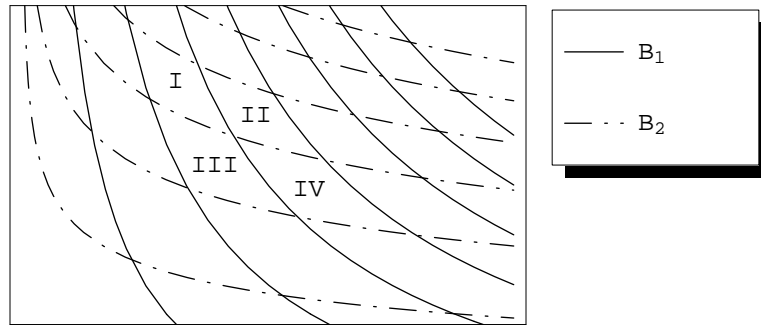
$$\begin{aligned} B_{-1} \subseteq B_0 \subseteq B_1 \text{ aus } \mathcal{B}_1 \\ C_{-1} \subseteq C_0 \subseteq C_1 \text{ aus } \mathcal{B}_2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

impliziert

$$\frac{\mu(I)}{\mu(II)} = \frac{\mu(III)}{\mu(IV)} \quad (6.3)$$

(d.h. $\mu(I)\mu(IV) - \mu(II)\mu(III) = 0$ oder

$$\det \begin{vmatrix} \mu(I) & \mu(II) \\ \mu(III) & \mu(IV) \end{vmatrix} = 0).$$



Hier

$$I = (B_1 \setminus B_0) \cap (C_1 \setminus C_0), \quad (6.4)$$

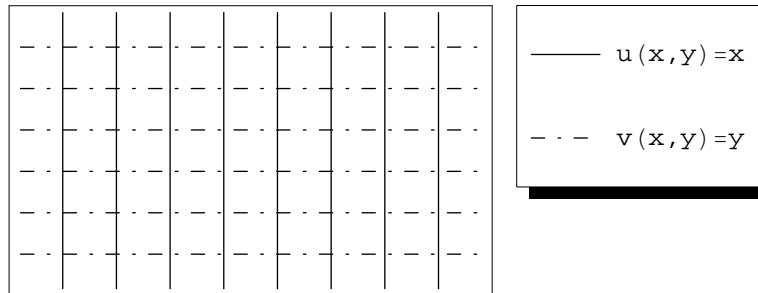
$$II = (B_0 \setminus B_{-1}) \cap (C_1 \setminus C_0), \quad (6.5)$$

$$III = ((B_1 \setminus B_0) \cap (C_0 \setminus C_{-1})), \quad (6.6)$$

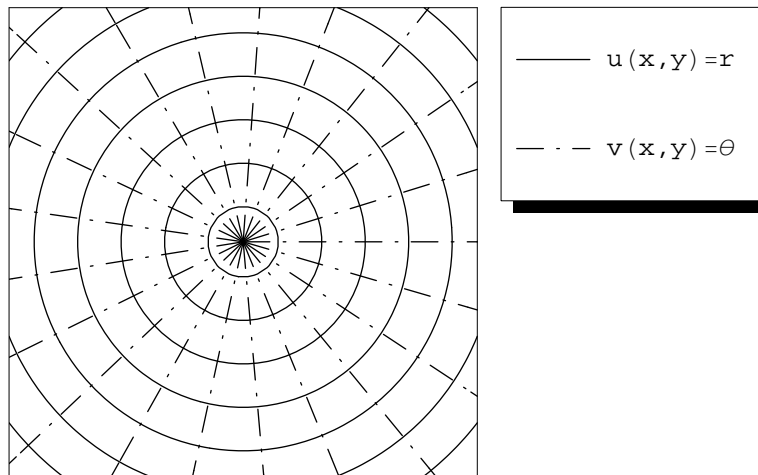
$$IV = (B_0 \setminus B_1) \cap (C_0 \setminus C_{-1}) \quad (6.7)$$

Beispiel: Seien u, v zwei meßbare Funktionen von Ω in \mathbf{R} . Mit \mathcal{B}_u (bzw. \mathcal{B}_v) bezeichnen wir die Familien $\{u \leq c\}$ ($c \in \mathbf{R}$) bzw. $\{v \leq d\}$ ($d \in \mathbf{R}$). Falls \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 eine Samuelson Konfiguration, dann sagen wir, dass u und v die *S-Bedingung* erfüllen (bzw. u ist zu v *S-transversal*).

Beispiel: $\Omega = \mathbf{R}^2$ und $u(x, y) = x$, $v(x, y) = y$ erfüllen trivialerweise die *S-Bedingungen*.



Beispiel: $u(x, y) = x$, $v(x, y) = y$. Die Konstanzmengen sind die konzentrischen Kreise mit Mittelpunkt 0 bzw. die Strahlen durch den Mittelpunkt. Diese Funktionen bilden eine S -Konfiguration (elementare Geometrie).



6.1 Existenz einer Potentialfunktion:

Sei Ω eine Menge, \mathcal{B}_1 eine totalgeordnete Familie von Teilmengen. Wir stellen uns die Frage: Wann existiert eine Potentialfunktion f , d.h., $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, sodass $\mathcal{B}_1 = \{ \{f \leq c\}, c \in \mathbf{R} \}$. Dazu verwenden wir die

Axiomatische Charakterisierung von \mathbb{Q} :

Sei A eine abzählbare total geordnete Menge, sodass

- A besitzt kein größtes oder kleinstes Element;
- $x < y$ in $A \Rightarrow$ es existiert $z \in A$ mit $x < z < y$

Dann ist $A \cong \mathbb{Q}$ (**Satz von Cantor**)

Satz 6.1.1 Sei Ω, \mathcal{B}_1 wie oben, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- Es existiert $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ surjektiv, sodass $\mathcal{B}_1 = \{ \{f \leq c\}, c \in \mathbf{R} \}$.

- $\bigcup \mathcal{B}_1 = \Omega, \bigcap \mathcal{B}_1 = \emptyset$, aber Ω, \emptyset nicht aus \mathcal{B}_1 ;
- Es existiert eine abzählbare Teilfamilie $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ von \mathcal{B}_1 , sodass falls $B \subset C \in \mathcal{B}_1 \Rightarrow$, es existiert $D \in \widetilde{\mathcal{B}}_1$ mit $B \subset D \subset C$;
- jedes $A \subset B$, ist $\bigcap_{\substack{B \in \mathcal{B}_1 \\ A \subset B}} B$.

BEWEIS. **Existenz einer Potentialfunktion** “ \Rightarrow ” ist trivial. “ \Leftarrow ” Wir betrachten $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ als geordnete Menge mit Inklusion. $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ erfüllt die Voraussetzung des Satzes von Cantor. Also können wir annehmen $\widetilde{\mathcal{B}}_1 = \{A_q : q \in \mathbb{Q}\}$ und $A_q \subset A_r \Leftrightarrow q < r$. ■

Sei jetzt $A \in \mathcal{B}_1$. Es gilt $A = \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{B}_1 \\ A \subset B}} B = \bigcap_{\substack{A \subset B \\ B \in \widetilde{\mathcal{B}}_1}} B$

Wir definieren dann: $f(x) = \inf\{q : x \in A_q\}$.

Bemerkung:

- Wenn man voraussetzt, dass Ω ein Maßraum und die Mengen aus \mathcal{B}_1 meßbar sind, dann ist f automatisch meßbar.
- Falls Ω ein topologischer Raum (z.B., \mathbf{R}^n) und jedes $A \in \mathcal{B}_1$ abgeschlossen, dann ist f automatisch halb stetig (vgl. Vorlesung Topologie).
- Es gibt eine Version für stetige Funktionen.

Bemerkung:

Sei $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ eine Potentialfunktion, $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ und streng steigend, $U = \phi \circ u$. Es gilt dann:

Die Mengensysteme $\{\{U \leq c\}, c \in \mathbf{R}\}$ und $\{\{u \leq d\}, d \in \mathbf{R}\}$ sind identisch. Man sagt dann: U ist eine **Umkalibrierung** von u .

Beispiel einer Umkalibrierung: $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \phi(r) = \frac{1}{2}r^2$ $u(x, y) =$

$$\phi_0 f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \text{ d.h. } x^2 + y^2 \leq C^2.$$

$$f \leq c \text{ bedeutet } r \leq c \text{ und } u \leq d \text{ bedeutet } (x^2 + y^2) \leq 2d.$$

Wir werden zeigen: Sei Ω ein Maßraum und \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 Familien, die eine Samuelson Konfiguration bilden und die Bedingung des Satzes über die Existenz von Potenzfunktionen erfüllen. Dann existiert eine **kanonische** Wahl von Potentialfunktionen, die im wesentlichen eindeutig bestimmt ist.

Beispiel:

$$\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus (0, 0)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$g(x, y) = \theta(x, y) \text{ der Winkelfunktion.}$$

Das ist eine Samuelson-Konfiguration (einfache Geometrie). Die kanonische Kalibrierung ist dann

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{x^2 + y^2}{2} \\ G(x, y) &= \theta(x, y) \quad \left(= \arctan \frac{y}{x} \right). \end{aligned}$$

Beispiel: $\Omega : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, $u(x, y) = xy$, $v(x, y) = xy^2$ erfüllt die Samuelson-Bedingung (dieses Beispiel entstammt der Thermodynamik). Wir betrachten jetzt

Das allgemeine Problem:

Gegeben Ω , f, g wie oben. Wann bilden die Mengensysteme

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= f \leq c \in \mathbf{R} \\ \mathcal{B}_1 &= g \leq d \in \mathbf{R} \end{aligned} \tag{6.8}$$

eine Samuelson Konfiguration?

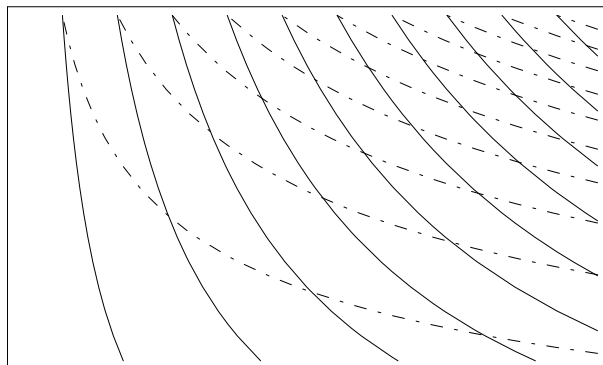
Wir betrachten den Fall, wo $\Omega = \mathbf{R}_2$ (allg.: $I \times J$ mit I, J Intervalle in \mathbf{R}) und

$$\begin{aligned} u &= f(x, y) \\ v &= g(x, y) \end{aligned} \tag{6.9}$$

wobei f, g glatte Funktionen von $I \times J$ in \mathbf{R} sind. Wir suchen eine partielle Differentialgleichung, die bestimmt ob f und g eine S -Konfiguration bestimmen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} u &= xy \\ v &= xy^2 \end{aligned}$$



Wir zeigen direkt, dass das Paar

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy \\ g(x, y) &= xy^2 \end{aligned} \tag{6.10}$$

auf \mathbf{R}^2 eine S -Konfiguration bildet. Zunächst berechnen wir den Flächeninhalt des Gebiets $F = \{a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d\}$:

$$\int_{a \leq u \leq b} \int_{c \leq v \leq d} 1 \, dx dy = \int_a^b \int_c^d \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, dudv = \int_a^b \int_c^d \frac{1}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|} \, dudv$$

Für $u = xy, v = xy^2$ ist die Jakobimatrix

$$\begin{bmatrix} y & x \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

mit Determinante $2xy^2 - xy^2 = xy^2 = v$. Damit ist das Integral

$$\int_a^b \int_c^d \frac{1}{v} \, dudv = (b - a) \ln \frac{d}{c} \tag{6.12}$$

Daher gilt

$$F(I) = (a_2 - a_1)(\ln b_2 - \ln b_1) \tag{6.13}$$

$$F(II) = (a_1 - a_0)(\ln b_2 - \ln b_1) \tag{6.14}$$

$$F(III) = (a_2 - a_1)(\ln b_1 - \ln b_0) \tag{6.15}$$

$$F(IV) = (a_1 - a_0)(\ln b_1 - \ln b_0) \tag{6.16}$$

und somit $F(I)F(IV) = F(II)F(III)$.

Beispiel: Wir betrachten das System mit $u = x^2 + y^2, v = \frac{y}{x}$ (d.h. die Koordinatenlinien für Polarkoordinaten).

Die Jakobimatrix ist

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{y}{x} & \frac{1}{x} \end{bmatrix} \text{ mit Determinante } 2 + \frac{2y^2}{x^2} = 2(1 + v^2). \tag{6.17}$$

Daraus folgt

$$F(I) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{2(1 + v^2)} \, dudv = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)[\arctan(b_2) - \arctan(b_1)] \tag{6.18}$$

und man sieht (analog wie oben), daß die S -Bedingung erfüllt ist.

Aus diesen Beispielen sieht man, dass man folgendes Problem lösen muss: Wir haben eine Funktion $F(u, v)$ von u und v . Wann gilt:

$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} F(u, v) dudv \int_{a_0}^{a_1} \int_{b_0}^{b_1} F(u, v) dudv = \int_{a_0}^{a_1} \int_{b_1}^{b_2} F(u, v) dudv \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_0}^{b_1} F(u, v) dudv$$

Die obigen Beispiele machen folgende Vermutung naheliegend: Das gilt genau dann, wenn $F(u, v)$ die Gestalt: $\phi(u)\psi(v)$ hat, wobei ϕ, ψ Funktionen von einer Variablen sind (man sagt dann, dass F multiplikativ zerlegbar ist).

Denn es gilt dann:

$F(I) = (\Phi(a_2) - \Phi(a_1))(\Psi(b_2) - \Psi(b_1))$, wobei Φ eine Stammfunktion von ϕ und Ψ eine Stammfunktion von ψ und daraus folgt leicht, dass $F(I)/F(II) = F(III)/F(IV)$.

In der Tat gilt:

Satz 6.1.2 Seien u, v wie oben. Dann erfüllen u und v die Samuelson-Bedingungen genau dann, wenn

$$J_{x,y} = u_x v_y - u_y v_x \quad (6.19)$$

multiplikativ zerlegbar (als Funktion von u und v) ist.

Daher stellen wir uns folgende

Frage: Man bestimme eine partielle Differentialgleichung für u, v als Funktionen von x, y , die feststellt, ob diese Bedingung erfüllt wird.

Bemerkung: Sei f glatt auf $I \times J$. Eine Funktion F von (x, y) ist genau dann additiv trennbar (d.h.: $F(x, y) = f(x) + g(y)$) wenn $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$.

Daher gilt: F ist multiplikativ separabel $\Leftrightarrow \ln F$ additiv separabel $\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\ln F) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F_y}{F} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{F_x F_y - F F_{xy}}{F^2} \Leftrightarrow F_x F_y = F_{xy}$.

Daraus folgt: u und v erfüllen die S -Bedingungen $\Leftrightarrow J_u J_v = J J_{uv}$. Wir müssen jetzt diese Gleichung (mit u, v als unabhängige Variablen) in eine Gleichung mit x und y als unabhängige Variablen transformieren.

Wir berechnen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Daraus folgen die Operatorenleichungen:

$$D_u = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{J} (v_y D_x - v_x D_y)$$

$$D_v = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{J} (-u_y D_x + u_x D_y).$$

Die Gleichung $J_u J_v = J J_{uv}$ nimmt die Gestalt:

$$\left(v_y D_x \left(\frac{1}{J} (-u_y J_x + u_x J_y) \right) - v_x D_y \left(\frac{1}{J} (-u_y J_x + u_x J_y) \right) \right) = 0$$

an, wobei

$$J_x = D_x(u_x v_y - u_y v_x) = u_x x v_y + u_x v_y x - u_x y v_x - u_y v_x x \quad (6.20)$$

usw. Mit Mathematica bekommt man leicht die explizite Gestalt dieser Gleichung.

Seien jetzt $U = \phi \circ u$ und $V = \psi \circ v$ Umkalibrierungen von u und v . Wir vergleichen jetzt $J(U, V)$ und $J(u, v)$. Da

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \phi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.21)$$

usw., gilt

$$J(U, V) = \det \begin{vmatrix} \phi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} & \phi'(u) \frac{\partial u}{\partial y} \\ \psi'(v) \frac{\partial v}{\partial x} & \psi'(v) \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \phi'(u) \psi'(v) J(u, v). \quad (6.22)$$

Falls u, v eine S -Konfiguration bilden, etwa mit $J(u, v) = a(u)b(v)$ dann ist

$$J(U, V) = \phi'(u)a(u)\psi'(v)b(v). \quad (6.23)$$

Wählen wir dann $\phi = \int \frac{1}{a(u)} du$, $\psi = \int \frac{1}{b(v)} dv$, dann ist $J = 1$.

Daher gilt: u, v bilden eine S -Konfiguration \Leftrightarrow es existieren Umkalibrierungen U und V , sodass $J(U, V) \equiv 1$.

Bemerkung: Diese Umkalibrierungen sind im wesentlichen eindeutig d.h. bis auf Transformationen

$$U \mapsto \lambda U + \mu, \quad V \mapsto \frac{1}{\lambda} V + \nu \quad (6.24)$$

Beispiel: Für $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \frac{y}{x}$ gilt

$$J = \det \begin{vmatrix} x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} & y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) = \frac{1}{u} (1 + v^2). \quad (6.25)$$

Also ist die Umkalibrierung

$$\begin{aligned} U &= \int u du = \frac{u^2}{2} \\ V &= \int \frac{1}{1 + v^2} dv = \arctan v. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Daher $U = \frac{x^2 + y^2}{2}$, $V = \theta(x, y)$.

Beispiel: Für sphärische Koordinaten in \mathbf{R}^3 gilt $J = \frac{1}{r^2 \sin \phi}$. Daher sind die kanonischen Umkalibrierungen $u \int r^2 dr = \frac{r^3}{3}$, $v = \theta$, $w = \cos \phi$.

Beispiel: Für $u = xy$, $v = xy^\gamma$ (vgl. thermodynamische Schreibweise: $T = pV$, $s = pV^\gamma$) gilt

$$J = \det \begin{vmatrix} y & x \\ y^\gamma & \gamma xy^{\gamma-1} \end{vmatrix} = (\gamma - 1)xy^\gamma = (\gamma - 1)v.$$

Die kanonische Umkalibrierung ist damit $U = u$, $V = \ln v$.

Die neue Entropiefunktion ist $\frac{1}{\gamma-1} \ln x + \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln y$ ($S = \frac{1}{\gamma-1} \ln p + \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln V$)

Beispiel: Für $u = x^a y^b$, $v = x^c y^d$ ist die S -Bedingung erfüllt. oVdA nehmen wir an: $ad - bc = 1$, $a \neq b$, $d \neq c$. Dann sind die kanonischen Umkalibrierungen

$$U = \frac{1}{d-c} x a (d-c) y^{b(d-c)} V = \frac{1}{a-b} x c (a-b) y^{d(a-b)}.$$

Existenz einer Energiefunktion: Unsere Ausgangssituation ist ein Paar

$$\begin{aligned} u &= f(x, y) \\ v &= g(x, y), \end{aligned}$$

das die S -Bedingung erfüllt. Wir vertauschen jetzt die Rollen der Variablen u, v (unabhängig) und x, y (abhängig). Es gibt 6 Möglichkeiten: (x, y) , (u, v) , (u, x) , (u, y) , (v, x) , (v, y) als unabhängige Variablen.

Wir betrachten etwa u und x als Funktion von v und y und berechnen die entsprechenden partiellen Ableitungen. Man rechnet am bequemsten mit Differentialformen:

$$\begin{aligned} u &= f(x, y) & du &= f_1 dx + f_2 dy \\ v &= g(x, y) & dv &= g_1 dx + g_2 dy \end{aligned}$$

Wir formen um:

$$\begin{aligned} du - f_1 dx &= f_2 dy \\ -g_1 dx &= -dv + g_2 dy \end{aligned}$$

mit Matrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -f_1 \\ 0 & -g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f_2 \\ -1 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dv \\ dy \end{bmatrix}$$

also

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} du \\ dx \end{bmatrix} &= -\frac{1}{g_1} \begin{bmatrix} -g_1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & f_2 \\ -1 & g_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -f_1 & -g_1 f_2 + f_1 g_2 \\ -1 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dv \\ dy \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d.h.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial v} &= \frac{f_1}{g_1} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{g_1}(-g_1 f_2 + f_1 g_2) \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{1}{g_1} \\ \frac{\partial x}{\partial y} &= -\frac{g_2}{g_1} \end{aligned}$$

Daraus sieht man, dass $J = 1 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial v}$.

Zusammenfassend: u, v erfüllen genau dann die S -Bedingung, wenn Umkalibrierungen U, V existieren, sodass die Maxwell Beziehung

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial V} \quad (6.27)$$

gilt. Es gibt 3 weitere Maxwell-Beziehungen, die alle äquivalent zur S -Bedingung sind. Um diese Beziehungen in der Sprache der Thermodynamik zu formulieren, verwenden wir das Wörterbuch: $u \leftrightarrow T$, $v \leftrightarrow S$, $x \leftrightarrow p$, $y \leftrightarrow V$. Sie sind dann:

$$\frac{\partial T}{\partial V} = -\frac{\partial p}{\partial S}, \quad \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial V}{\partial S} \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial p}{\partial T}, \quad \frac{\partial S}{\partial p} = -\frac{\partial V}{\partial T}. \quad (6.29)$$

Wir untersuchen jetzt die Frage, wann eine Potentialfunktion E existiert, sodass $\phi = \frac{\partial E}{\partial y}$ und $\psi = \frac{\partial E}{\partial x}$

Die Maxwell-Beziehungen sind Integrierbarkeitsbedingungen und daher äquivalent zur Existenz von Energiefunktionen, und zwar:

$$E(S, V), \text{ sodass } T = \frac{\partial E}{\partial S}, \quad p = -\frac{\partial E}{\partial V} \quad (\text{Energie}) \quad (6.30)$$

$$W(p, S), \text{ sodass } T = \frac{\partial W}{\partial S}, \quad V = \frac{\partial W}{\partial p} \quad (\text{Enthalpie}) \quad (6.31)$$

$$F(T, V), \text{ sodass } T = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad p = -\frac{\partial F}{\partial V} \quad (\text{freie Energie}) \quad (6.32)$$

$$\phi(T, p), \text{ sodass } S = -\frac{\partial \phi}{\partial T}, \quad V = \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad (\text{freie Enthalpie}) \quad (6.33)$$

Beispiel: Wir berechnen die kanonischen Umkalibrierungen und Energiefunktionen in einigen klassischen Fällen:

Betrachten wir zunächst das System

$$\begin{aligned} u &= xy \\ v &= xy^\gamma \end{aligned}$$

mit Umkalibrierung

$$v = \frac{1}{\gamma - 1} \ln x + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln y.$$

Wir berechnen die Energiefunktion, wobei wir S, V sprich v und y als unabhängige Variablen betrachten. Eine einfache Rechnerei führt zur Gleichung

$$\begin{aligned} u &= \frac{e^{(\gamma-1)v}}{y^{\gamma-1}} \\ x &= \frac{e^{(\gamma-1)v}}{y^\gamma} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= (1 - \gamma)e^{(\gamma-1)v}y^\gamma \\ \frac{\partial u}{\partial v} &= (\gamma - 1)e^{(\gamma-1)v}y^{1-\gamma} \\ \frac{\partial x}{\partial y} &= -\gamma e^{(\gamma-1)v}y^{(-\gamma-1)} \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= (\gamma - 1)e^{(\gamma-1)v}y^\gamma \end{aligned}$$

Also

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial v} \quad (6.35)$$

Wir suchen $E(u, v)$, sodass

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial u} &= e^{(\gamma-1)v} y^{1-\gamma} \\ -\frac{\partial E}{\partial y} &= e^{(\gamma-1)v} y^{-\gamma}.\end{aligned}\tag{6.36}$$

Das führt zur Funktion

$$E = \frac{e^{(\gamma-1)v} y^{1-\gamma}}{\gamma - 1}\tag{6.37}$$

Beispiel: Für $u = x^a x^b$
 $v = x^c y^d$ gelten die Umkalibrierungen:

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{d-c} x^{a(d-c)} y^{b(d-c)} \\ V &= \frac{1}{a-b} x^{c(a-b)} y^{d(a-b)}\end{aligned}\tag{6.38}$$

Wir lösen für U, x als Funktionen von y, V :

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{d-c} ((a-b)V)^{\frac{a(d-c)}{c(a-b)}} y^{\frac{-d-c}{c}} \\ x &= ((a-b)V)^{\frac{1}{c(a-b)}} y^{\frac{-d}{c}}\end{aligned}\tag{6.39}$$

$$\Rightarrow E(y, v) = \frac{c}{c-d} (a-b)^{\frac{1}{c(a-b)}} V^{\frac{1}{c(a-b)}} y^{(c-d)c}.\tag{6.40}$$

6.2 Existenz und Eindeutigkeit von S -Transversalen

Wir betrachten jetzt das allgemeine Problem: gegeben eine Kurvenschar $\{u = c\}$. Existiert eine Schar $\{v = d\}$, die dazu S -transversal ist? Wir beginnen mit einem Spezialfall:

Beispiel: Sei $u = a(x)$. Wir suchen

$$v = f(x, y)$$

sodass $\det J = 1$ d.h.

$$1 = \det J = \begin{vmatrix} a' & 0 \\ f_x & f_y \end{vmatrix} = a' f_y.\tag{6.41}$$

Es ist klar, dass $u(x, y) = \frac{y}{a'(x)} + b(x)$ eine Lösung ist, für jede Funktion b .

Daher der Satz:

Satz 6.2.1 Eine Kurvenschar $\{v(x, y) = d\}$ ist zu $\{x = c\}$ S -transversal $\Leftrightarrow v(x, y)$ eine Umkalibrierung einer Funktion der Gestalt $A(x)y + B(x)$.

Seien jetzt c_1, c_2 zwei Kurven, etwa $y = f_0(x), y = f_2(x)$.

Wir wählen A, B , sodass

$$\begin{aligned} A(x)y + B(x) &= 0 \Leftrightarrow y = f_0(x) \\ A(x)y + B(x) &= 1 \Leftrightarrow y = f_1(x) \end{aligned} \tag{6.42}$$

Es ist leicht zu sehen, dass $B/A = f_0, 1 - \frac{B}{A} = f_1$. Damit werden A und B eindeutig bestimmt.

Damit bekommt man Existenz- und Eindeutigkeitsausagen für den allgemeinen Fall.

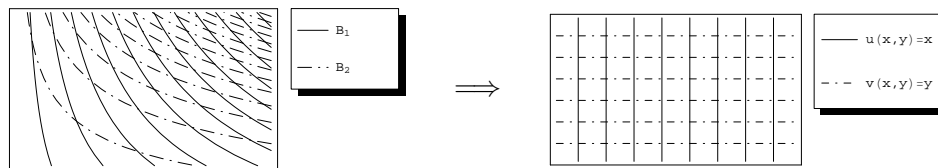
Um die Existenz- und Eindeutigkeitsausagen im allgemeinen Fall anzudeuten, berechnen wir als ein konkretes Beispiel alle Funktionen v , sodass v zu $u = xy$ S -transversal ist.

Wir führen neue Koordinaten x, y ein, wobei:

$$X = xy$$

$$Y = \ln(xy^2).$$

Die wesentliche Tatsache ist, dass $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = 1$



In der X, Y -Ebene sind die Kurven $u = c$, die Geraden $X = d$. Damit ist eine Funktion $V(X, Y)$ zu $\{X = d\}$ S -transversal, genau wenn V eine Umkalibrierung der Funktion $A(x)y + B(x)$ ist.

Daher gilt: v ist zu $u = xy$ transversal $\Leftrightarrow v(x, y) = \phi(a(xy) \ln(xy^2) + b(xy))$ (ϕ, a, b Funktionen einer Variablen).

Übung: Bestimme eine Funktion v , so dass u und v eine S -Konfiguration bilden und $v = 1$ ist die Kurve $xy^2 = 2$ und $v = 2$ ist die Kurve $xy^3 = 10$

Van der Waals: Wir betrachten die Funktion

$$u = \frac{a(x + \frac{d}{y^2})(by - c)}{b} \tag{6.43}$$

(Die Niveaulinien von u sind die Isotherme eines an der Waals-Gas.) Durch Inspektion bekommt man die Funktion

$$v = \frac{1}{a} h \left[\frac{(x + \frac{d}{y^2})(by - c)^2}{b} \right], \tag{6.44}$$

die zu u S -transversal ist.

Spezialfall:

$$\begin{aligned} u &= \left(x + \frac{1}{y^2}\right)(y-1) \\ v &= \ln\left(x + \frac{1}{y^2}\right) + \ln((y-1)^2) \end{aligned} \tag{6.45}$$

(mit Energiefunktion $E = \frac{e^v}{y-1} - \frac{1}{y}$). Man berechnet (wie oben), dass v zu $u = \left(x + \frac{1}{y^2}\right)(y-1)$ S -transversal ist $\Leftrightarrow v$ die Gestalt

$$\left(\phi \left[G \left\{ \left(x + \frac{1}{y^2}\right)(y-1) \right\} \ln \left(\left\{ \left(x + \frac{1}{y^2}\right)(y-1)^2 \right\} \right) \right] + H \left\{ \left(x + \frac{1}{y^2}\right)(y-1) \right\} \right)$$

hat.

Als weiteres Beispiel berechnen wir “alle Adiabatischen” für das van der Waals Gas

Beispiel: $u(x, y) = \left(x + \frac{1}{y^2}\right)(y-1)$. Die Familie $\{u = c\}$ sind die Isotherme des Van der Waals-Gases

Wie berechnen alle v so, dass u und v eine S -Konfiguration bilden. Man verwendet die neuen Variablen

$$\begin{aligned} X &= \left(x + \frac{1}{y^2}\right) \\ Y &= (y-1) \end{aligned}$$

Wiederum gilt:

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = 1 \tag{6.46}$$

Wie oben bekommt man die Form

$$\begin{aligned} U(x, y) &= a \left(\left(x + \frac{1}{y^2}\right)(y-1) \right) \\ V(x, y) &= \phi \left(b \left(\left(x + \frac{1}{y^2}\right)(y-1) \ln \right) \right) \left[\left(x + \frac{1}{y^2}\right)(y-1)^2 \right] + \left[\left(x + \frac{1}{y^2}\right)(y-1) \right] \end{aligned}$$

Als letztes Beispiel betrachten wir Konfigurationen, die durch Symmetrie entsteht. Solche Beispiele sind in der Kartographie wichtig (flächentreue ebene Projektionen).

Beispiel: $(x-c)^2 + y^2 = c^2$ ist ein Kreis mit Radius c und Mittelpunkt $(c, 0)$. Diese Familie ist die Schar aller Kreise, die die y -Achse im Nullpunkt berühren.

Sie sind die Niveaulinien von $u(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x}$. Durch Inspektion sieht man, dass: $v(x, y) = \frac{y}{x}$ mit u eine S -Konfiguration bilden.

Beispiel: (die Dilatationsgruppe)

Sei

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\lambda \end{bmatrix}.$$

$A(\lambda)$ erzeugt die Dilatation $((x, y) \mapsto (e^\lambda x, e^\lambda y))$.

$\{A(\lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}$ ist eine Transformationsgruppe, da $A(\lambda + \mu) = A(\lambda)A(\mu)$.

Diese Gruppe erzeugt die obige Konfiguration. Denn die Kreise sind die Bilder von Kreis $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ bzgl. $\{A(\lambda)\}$ und die Strahlen $\frac{y}{x} = c$ sind die Orbits der Gruppe. Allgemein gilt:

Satz 6.2.2 Gegeben ist eine Transformationsgruppe $\{A(\lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}$ von affinen Abbildungen und eine Kurve c . Dann bilden die Orbits von $\{A(\lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}$ sind (also Mengen der Gestalt $\{A(\lambda)(x_0) : \lambda \in \mathbf{R}\}$ und die Bilder von c bzgl. der Gruppe $\{A(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ eine S -Konfiguration.

Aus der obigen Theorie sieht man, dass man damit eine flächentreue Projektion konstruieren kann.

Beispiel: Als Gruppe verwendet man die Rotationsgruppe $\{A(\theta) : \theta \in \mathbf{R}\}$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ und als Kurve } \Gamma = \{(x - 1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$$

Aus der Theorie folgt: es existiert ein flächentreuer Kartenentwurf mit $U = c$, $V = d$ als Parallelen und Meridianen.

Weiteres Beispiel: $u(x, y) = x^a + y^a$, $v(x, y) = \frac{y}{x}$ sind S -transversal. Die Niveaulinien von u sind die sogenannten Laméschen Kurven:

